PIKAS
Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen

# Rechenschwierigkeiten vermeiden

Hintergrundwissen und Unterrichtsanregungen für die Schuleingangsphase

BILDUNGSLAND NRW
Hier wachsen Talente.

**Sehr geehrte Lehrerinnen und Lehrer, liebe Leserinnen und Leser,
das Erlernen von Mathematik, insbesondere die basale Rechenfähigkeit, ist eine grundlegende Schlüsselqualifikation und für das Leben in unserer Gesellschaft unerlässlich.**

Die Ergebnisse des letzten IQB-Bildungstrends zeigen auch für NRW im Bereich Mathematik Handlungsbedarf auf. Deutschlandweit verfehlen ca. 22% der Viertklässler die bestehenden Mindeststandards, in NRW sind es sogar knapp 24%. Die Gründe hierfür mögen vielseitig sein. Für uns als Verantwortliche für Schule und Bildung ist das Ergebnis ein Handlungssignal. Deshalb haben wir uns im Kontext des Masterplans Grundschule auch für eine Fachoffensive Mathematik zur Unterstützung der Grundschularbeit entschlossen und beginnen diesen Prozess mit der vorliegenden Handreichung „Rechenschwierigkeiten vermeiden".

Aufbauend auf der schon seit mehr als zehn Jahren bestehenden Kooperation mit der Technischen Universität Dortmund, auch unterstützt durch die Deutsche Telekom Stiftung, sollen Sie, liebe Lehrkräfte, durch die Handreichungsreihe „Mathematik Primarstufe kompakt" in Ihrem alltäglichen unterrichtlichen Handeln zusätzlich unterstützt werden.

Neben den bestehenden, qualitativ weitreichenden Angeboten „PIKAS", „PIKAS kompakt", „PIKAS digi" und „PIKAS Inklusiv", die insbesondere onlinebasierten Anregungen und Materialien für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht bereithalten, und den Fachtagungen der Universität, soll nun der Blick lehrwerksunabhängig in Form von verschiedenen Handreichungen auf zentrale und bedeutsame didaktisch-methodische Einflussbereiche für das Fach gelegt werden. Dies ist das erste Heft einer geplanten Veröffentlichungsreihe mit weiteren Themen, wie zum Beispiel „Mathematik gemeinsam lernen" oder „Digitale Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe".

Die Reihe verfolgt konsequent das Ziel, unter verschiedenen Gesichtspunkten in knapper Form Hintergrundinformationen und Hilfestellungen für den Unterricht zu geben.

Die Hauptintention der vorliegenden Handreichung besteht darin, den Fokus auf zentrale Schlüsselstellen zu richten, um das Auftreten von Rechenschwierigkeiten weniger wahrscheinlich werden zu lassen.

Die Handreichung wurde im Projekt PIKAS von einem Team von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern der Technischen Universität Dortmund und Grundschullehrkräften aus Nordrhein-Westfalen entwickelt. Ich danke allen Beteiligten für das hohe Engagement, mit dem sie ihr Expertenwissen und ihre Erfahrungen bei der Erstellung der Handreichung eingebracht haben, um möglichst für jedes Kind das Erreichen der Mindeststandards sicher zu stellen.

Ihnen, liebe Leserinnen und Leser, danke ich an dieser Stelle ausdrücklich für Ihr Interesse an diesem wichtigen Thema und für Ihr Engagement, die Leistungen der Ihnen anvertrauten Kinder mit Rechenschwierigkeiten im Fach Mathematik an Ihrer Schule weiter zu verbessern.

Ihre **Yvonne Gebauer**
Ministerin für Schule und Bildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

# Intention und Konzeption der Handreichung

## Toni gibt 19 als Ergebnis der Aufgabe 12 + 34 an. Wie kommt er zu diesem Resultat?

Toni hat 12 + 3 + 4 statt 12 + 34 gerechnet, also nicht berücksichtigt, dass die 3 an der Zehnerstelle steht. Es könnte durchaus sein, dass Toni im Unterricht nicht genügend Lerngelegenheiten erhalten hat, um ein gesichertes Stellenwertverständnis aufbauen zu können. In diesem Fall wäre der Unterricht dann für Tonis Schwierigkeiten mitverantwortlich.
Positiv formuliert: Ein Unterricht, in dem die potenziellen stofflichen Hürden bei der Planung, Durchführung sowie Auswertung des Unterrichts angemessen berücksichtigt werden, kann die Wahrscheinlichkeit deutlich senken, dass Schülerinnen und Schüler Rechenschwierigkeiten entwickeln (Schipper, 2009, S. 329ff; Gaidoschik, 2010; Meyerhöfer, 2011). Vollständig verhindern können werden Lehrpersonen sie allerdings vermutlich nicht.

Bei der Umsetzung eines solchen Unterrichts soll Sie die vorliegende Handreichung unterstützen, die wichtiges Hintergrundwissen zu zentralen Inhalten des arithmetischen Anfangsunterrichts darstellt *(Was sollte man wissen?)* und durch konkrete Anregungen für den Unterricht illustriert *(Was sollte man tun?)*.

Die angestrebte Kompaktheit hat dabei zur Folge, dass diverse Aspekte nicht in der denkbaren Tiefe und Breite behandelt werden können. Die Handreichung bietet somit weder eine umfassende Diskussion verschiedener Sichtweisen auf das Thema noch eine ausführliche Darstellung von empirischen Untersuchungen oder eine detaillierte Auflistung von Testverfahren, Erhebungsmethoden oder rechtlichen Rahmenbedingungen. Zu diesen Punkten verweisen wir exemplarisch auf Englisch et al. (2018), Fritz, Schmidt & Ricken (2017), Wartha & Schulz (2014) oder auf die diversen, aus dem Literaturverzeichnis ersichtlichen Bücher von Gaidoschik.

In dieser Handreichung beschreiben wir eingangs zentrale Merkmale und Risikofaktoren von Rechenschwierigkeiten (Kap. 1). Anschließend befassen wir uns mit Diagnose im Sinne des stärkenorientierten Verstehens von Denkwegen (Kap. 2) und mit Förderung als darauf basierendem, zielbewusstem Anregen von Lernprozessen (Kap. 3). Den Kern der Handreichung bilden die Ausführungen zu sechs zentralen Themen der Schuleingangsphase (Kap. 4 - 9): Zahlverständnis, Operationsverständnis, Stellenwertverständnis sowie das nicht zählende Rechnen bei Einspluseins und Einminuseins, beim additiven Rechnen bis 100 sowie bei Einmaleins und Einsdurcheins.
Jedes Kapitel fasst das zentrale Hintergrundwissen zusammen und konkretisiert es durch Unterrichtsanregungen. Aufgrund der Bedeutsamkeit im Kontext des Themas kommt den Themen „Darstellungen" (Kap. 10) und „Üben" (Kap. 11) jeweils ein eigenes Kapitel zu.
Viele der Beispiele und der konzeptionellen Überlegungen entstammen dem Projekt PIKAS und seinen Partnerprojekten, oder sie wurden hier weiter ausgearbeitet. Aus diesem Grund schließen die Handreichungen auch mit Hinweisen auf diese Projekte, die unter dem Dach des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik stehen (Kap. 12).

Wenn wir im Folgenden einige weiterführende Hinweise auf frei zugängliches Material anführen, geben wir jeweils eine sog. **Kurz-URL** an, die aus der Adresse der Website und einem dreiziffrigen Code besteht. Wenn Sie also z. B. *pikas.dzlm.de/**443*** eingeben, erhalten Sie konkrete Anregungen zum Üben.

Dortmund, im September 2020
**Das PIKAS-Team**

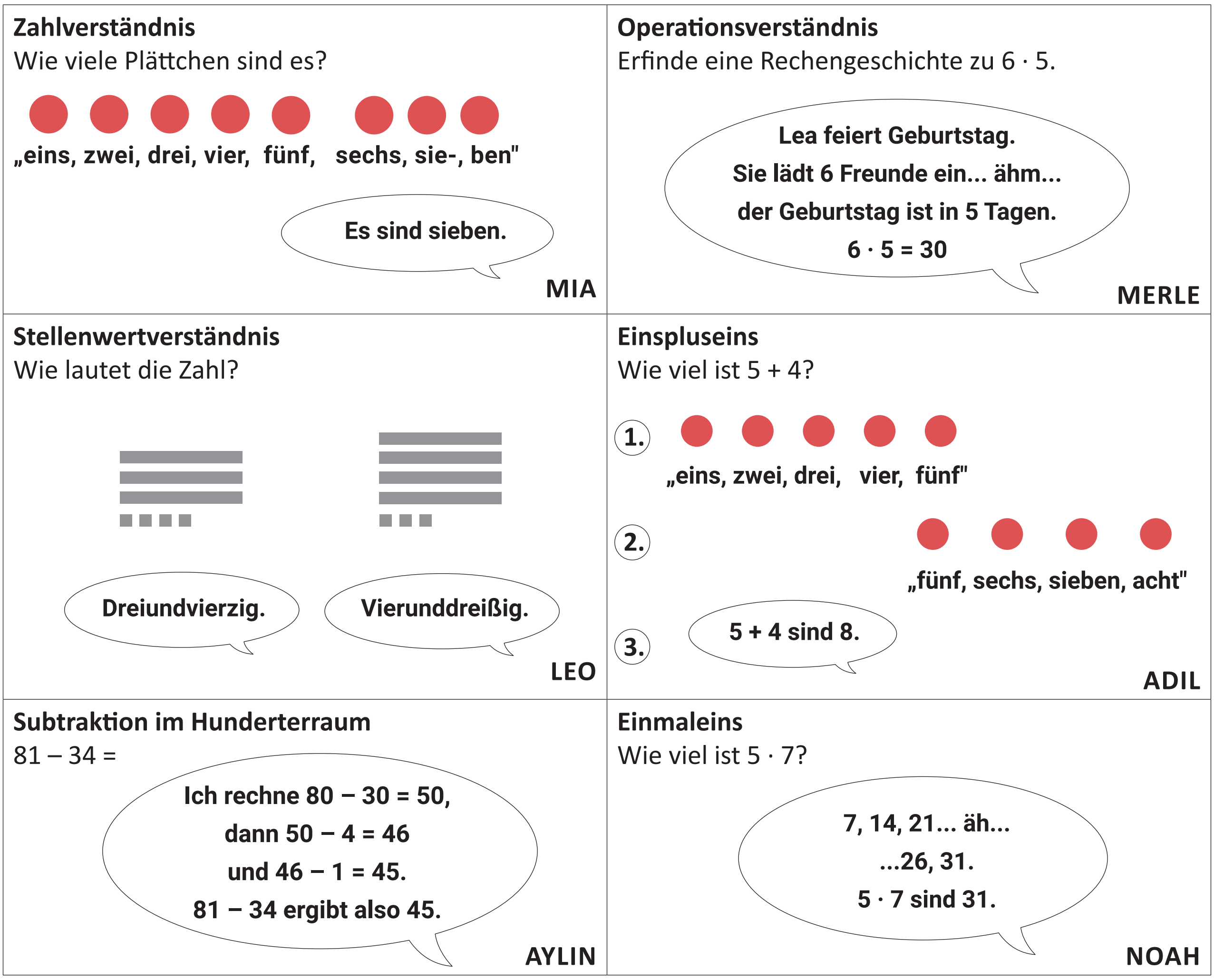
# Inhaltsverzeichnis

# 1 Besondere Schwierigkeiten beim Rechnen

- Fortbildungsmaterial zum Thema Rechenschwierigkeiten *(pikas.dzlm.de/366)*
- Unterrichtsmaterial zum Thema Rechenschwierigkeiten *(pikas.dzlm.de/166)*
- Förderanregungen *(pikas-mi.dzlm.de/400)*

Am Ende der Sekundarstufe I gibt es einen nicht zu vernachlässigenden Anteil von etwa 20 Prozent der Jugendlichen, die – so die Ergebnisse der PISA-Studie (Reiss et al., 2016) oder des IBQ-Ländervergleichs (Pant et al., 2013) – am Ende der Regelschulzeit nur wenige Anforderungen bewältigen können, die über elementare Standardaufgaben hinausgehen, und teilweise auf Grundschulniveau rechnen. Diese Schwierigkeiten entwickeln sich nicht erst in der Sekundarstufe (Moser Opitz, 2007). Auch am Ende der Grundschulzeit haben ca. 20% der Lernenden ernsthafte Schwierigkeiten in Mathematik und beim Rechnen – etwas vereinfacht gesagt, sie befinden sich auf dem Wissensstand von Zweitklässlerinnen und Zweitklässlern (Selter et al., 2016; Stanat et al., 2017). Kennen Sie Kinder, die so vorgehen, wie es die folgenden Beispiele zeigen?

## 1.1 FALLBEISPIELE




## 1.2 ZENTRALE MERKMALE

Zunächst: Es gibt weder eine allgemein anerkannte Definition dessen, was Schwierigkeiten beim Rechnen ausmacht, noch ein allgemein anerkanntes Diagnoseverfahren. Daher wird versucht, sich der Begrifflichkeit der Rechenschwierigkeiten zu nähern, indem zentrale Merkmale angegeben werden, die auf Schwierigkeiten hindeuten.

Dabei gilt: Rechenprobleme sind normal, und Fehler gehören zum Lernen dazu. Wenn Lernende also manchmal so vorgehen, wie es die Beispiele auf der

vorangehenden Seite zeigen, sollten Sie nicht beunruhigt sein. Aber wenn solche Probleme gehäuft auftreten, die Kinder also durchgängig überfordert zu sein scheinen, werden aus Rechenproblemen besondere, anhaltende Rechenschwierigkeiten. Wenn wir im Weiteren von Rechenschwierigkeiten sprechen, dann meinen wir damit nicht die normalen Probleme, sondern die besonderen Schwierigkeiten, lassen aber das Wort ‚besonders' aus Gründen der sprachlichen Vereinfachung weg.
In Anlehnung an Schipper (2011) und Wartha & Schulz (2014) können für die Schuleingangsphase vier zentrale Merkmale identifiziert werden, die auf Rechenschwierigkeiten hindeuten:

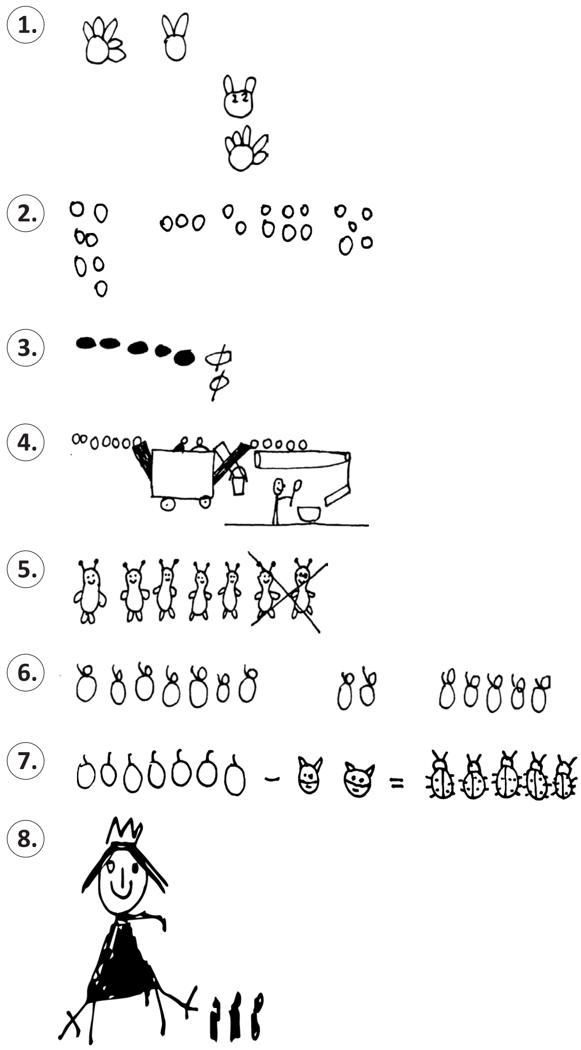
- **Nicht tragfähiges Zahlverständnis**
  Die Grundlage allen Rechnens bildet ein tragfähiges Zahlverständnis. Es kann als ein Merkmal von Schwierigkeiten in Mathematik gelten, wenn die Lernenden Zahlen nicht mit Bedeutungen verknüpfen, verschiedene Darstellungsformen nicht miteinander vernetzen und den vorhandenen Beziehungsreichtum von Zahlen für das Weiterlernen nicht nutzen können (vgl. Mia).

- **Nicht tragfähiges Operationsverständnis**
  Rechts sehen Sie einige von Schülerinnen und Schülern notierte Darstellungen für den Zahlensatz 7 – 2 = 5 (Quelle: Radatz, 1989). Während die leistungsstarken Lernenden in der Regel ihre Darstellungen als Bildgeschichten oder in Form der bekannten Schulbuch-Bilder des Hinzukommens oder Hinzulegens bzw. des Weggehens oder Weglegens zeichneten, gelang den schwächeren Lernenden häufig nur eine Übersetzung in eine andere symbolische Darstellung. Oder sie zeichneten ein Bild, das schwer mit dem Zahlensatz in Verbindung zu bringen ist (Nr. 2, 6, 7, 8; vgl. Merle).

- **Nicht tragfähiges Stellenwertverständnis**
  Zu verstehen, dass Anzahlen fortgesetzt gebündelt werden, um sie mit nur wenigen Ziffern oder mit Material übersichtlich darstellen zu können, gehört zu den zentralen Ideen unseres Zahlsystems. Lernende müssen verstehen, dass die 3 in 35 etwas anderes bedeutet als die 3 in 307 oder 43 (vgl. Toni, S. 3 oder Leo, S. 6).

- **Verfestigung des zählenden Rechnens**
  Zählendes Rechnen ist in frühen Phasen des Lernprozesses normal. Dass beispielsweise Schulanfängerinnen und Schulanfänger die Aufgabe 3 + 4 lösen, indem sie mit Material oder an ihren eigenen Fingern zunächst bis 3 und dann von dort aus um 4 weiter zählen (4, 5, 6, 7), ist keineswegs unüblich. Im weiteren Verlauf des Lernprozesses sollten die Kinder das zählende Rechnen nicht länger als Lösungsmethode verwenden. Diese notwendige Entwicklung betrifft nicht nur das Einspluseins und das Einsminuseins (vgl. Adil), sondern das gesamte Rechnen, wie z. B. auch das additive Rechnen in größeren Zahlräumen (vgl. Aylin) oder das Einmaleins und Einsdurcheins (vgl. Noah).

Weitere Merkmale wie Unsicherheiten in der Raum-Lage-Wahrnehmung, fehlende Größenvorstellungen, ein schwaches auditives Gedächtnis oder geringes Selbstvertrauen können ebenfalls auftreten.
Die vier hier genauer beschriebenen Merkmale verweisen auf stoffliche Hürden, die Lernende im Verlauf der Grundschulzeit überspringen müssen. Wie Sie die Schülerinnen und Schüler dabei unterstützen können, beschreiben wir überblickartig in den Kapiteln 4 bis 9. Der Entwicklung des nicht zählenden Rechnens kommen dabei aufgrund der Relevanz für unterschiedliche Stoffgebiete drei Kapitel zu.



## 1.3 RISIKOFAKTOREN

Bislang konnten keine Ursachen identifiziert werden, die eine Rechenschwäche zwangsläufig zur Folge haben. Aber eine Rechenschwäche ergibt sich andererseits auch nicht zufällig. Es gibt Risikofaktoren, die dazu beitragen können, dass sich in deren Zusammenwirken Schwierigkeiten verfestigen. In Anlehnung an Schipper (2011) wollen wir diese in drei Faktorengruppen zusammenfassen, die natürlich nur auf dem Papier sauber voneinander zu trennen sind.

- **Individuelle Risikofaktoren,** z. B. …
  neurologische Fehlleistungen wie Wahrnehmungsstörungen, Angst vor Mathematik und Mathematikunterricht, schwindendes Zutrauen in die eigenen Lernmöglichkeiten, Schwierigkeiten im Aufrechterhalten von Motivation und Aufmerksamkeit, Probleme bei der Aufnahme oder beim Behalten von Informationen sowohl im Langzeitgedächtnis (auswendig gelernte Ergebnisse von Einmaleinsaufgaben) als auch im Kurzzeitgedächtnis (Zwischenergebnisse von Aufgaben wie 47 + 89), unerkannte Beeinträchtigungen der Hör- oder der Sehfähigkeit oder Sprachschwierigkeiten …

- **Familiäre und soziale Risikofaktoren,** z. B. ...
  systematische Erziehung zur Unselbstständigkeit, das Fehlen von elementaren Voraussetzungen für erfolgreiches Lernen (z. B. eigener Arbeitsplatz für Hausaufgaben oder das Sorgen für hinreichend viel Schlaf), das Erzeugen von ausgeprägter Angst vor Misserfolg oder von übertriebenem Perfektionismus durch überzogene Erwartungen, zu den schulischen Bemühungen im Widerspruch stehende, ungeeignete Belehrungsversuche durch ungeduldige Erwachsene, psychische Belastungen durch angespannte Familiensituationen, Überbeanspruchung durch außerschulische Aktivitäten, soziale Isolation in Schule und Alltag …

- **Didaktische Risikofaktoren,** z. B. …
  unverständliche Aufgabenstellungen in wenig übersichtlichen Schulbüchern, das Vorschreiben bestimmter Denkwege, Stofffülle, ungeeignete Materialien oder Veranschaulichungen, der nicht sachgerechte Einsatz von geeigneten Medien oder eine verfrühte Behandlung abstrakter Darstellungen. Auch eine verfehlte Übungspraxis kann zur Ausprägung von Lernschwierigkeiten beitragen: etwa ein frühes Abkoppeln von anschaulichen Darstellungen oder die Häufung von Übungsaufgaben, die nicht auf individuelle Schwierigkeiten eingehen …

Die Risikofaktoren können vielfältig miteinander in Beziehung stehen und sich gegenseitig beeinflussen. Sie können die Ausbildung von Rechenschwierigkeiten unterstützen, müssen dies aber nicht zwingend. Lehrpersonen sollten alle drei Bündel von Risikofaktoren im Blick haben. Sie können jedoch fast ausschließlich die im dritten Bündel zusammengefassten Faktoren beeinflussen.

Daher liegt der Schwerpunkt dieser Handreichung auch auf den didaktischen Risikofaktoren, die anhand der zentralen sechs Inhalte des Arithmetikunterrichts in der Schuleingangsphase konkretisiert werden. Der Schwerpunkt der Darstellungen liegt dabei in Ausführungen dazu, wie das Auftreten von Rechenschwierigkeiten weniger wahrscheinlich gemacht werden kann (‚Prävention'). Aber natürlich sind die diesbezüglichen Ausführungen auch dann relevant, wenn vermutet werden kann, dass ein Kind Rechenschwierigkeiten hat (‚Therapie').

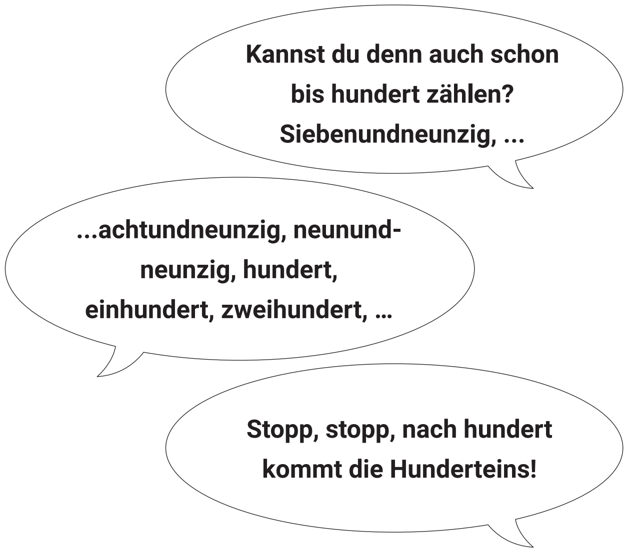
**Wer die Aufgaben nicht so lösen kann, darf noch das Material benutzen.**

**– ein Beispiel dafür, wie Unterricht dazu beitragen kann, dass Kinder mit Schwierigkeiten ‚stigmatisiert' werden können und wie über den gesamten Lernprozess hinweg der hilfreiche Einsatz von Material als minderwertig bezeichnet wird.**

## 1.4 STÄRKENORIENTIERUNG ALS GRUNDHALTUNG

Wenn Sie Kinder beim Mathematiklernen unterstützen wollen, so sind fachliche und fachdidaktische Kompetenzen erforderlich. Von zentraler Bedeutung ist es zudem, zu verstehen, wie Kinder denken, um auf dieser Grundlage den bisherigen Unterricht zu reflektieren und den zukünftigen zu planen. In diesem Zusammenhang interessieren natürlich die Produkte des Denkens, die Ergebnisse. Mindestens ebenso wichtig ist aber das Verständnis des Vorgehens der Kinder, ihrer Denk- und Lernprozesse (Kap. 2.1). Entscheidend ist dabei, wie diese Vorgehensweisen wahrgenommen und gedeutet werden.

Hierzu ein fast schon klassisches Beispiel: Lernen besteht häufig aus dem Herstellen von Beziehungen. Es werden Regeln von einem Gebiet auf ein anderes übertragen. Oft gelten diese auf dem neuen Terrain, aber eben nicht immer. Es gibt Ausnahmen und Inkonsequenzen, die das Lernen erschweren – beispielsweise bei der deutschen Zahlwortbildung:




In den weitaus meisten Fällen sind jedoch nicht 100 und 200, sondern 101 und 102 gemeint. Die Kinder sagen ‚einhundert' bzw. ‚zweihundert', weil sie die Regel ‚erst die Einer sprechen' (sieben-und-neunzig) aus ihrer Sicht konsequent auf einen Bereich übertragen, in dem sie allerdings nicht mehr gilt. Erwachsene neigen leider dazu, diese und weitere konstruktive Sprachschöpfungen – wie zehnzig oder zehnzwei – ausschließlich als fehlerhafte Zahlwortbildungen wahrzunehmen. Bei dieser Grundeinstellung erfolgt die Orientierung hauptsächlich an dem, was richtig scheint. Abweichungen davon gelten als Defizite. Es gilt, diese schnell zu korrigieren oder schon im Vorfeld zu verhindern.

Im Gegensatz dazu können die Äußerungen und Handlungen immer auch aus stärkenorientierter Perspektive betrachtet werden, als Dokumente prinzipiell vernünftigen Denkens: Was haben sich die Kinder möglicherweise gedacht? Was können sie schon alles? Was sind die vernünftigen Hintergründe eines aus unserer Sicht falschen Vorgehens? Wie können sie mit Blick auf die ‚Norm' dazu angeregt werden, ihr Denken und Wissen weiterzuentwickeln?

Den Kindern in Mathematik mehr zuzutrauen, ist Voraussetzung wie Resultat des Bemühens, immer auch die Perspektive der Kinder einzunehmen. Zur 101 ‚einhundert' zu sagen, ist also – mit ihren Augen betrachtet – durchaus sinnvoll.

Das Bemühen, immer auch stärkenorientiert zu schauen, bedeutet natürlich nicht, dass Sie den Schülerinnen und Schülern nicht auch Dinge erklären sollten („Die nächste Zahl könnte ‚einhundert' lauten, aber man hat sich darauf geeinigt, sie 'hunderteins' zu nennen!") – oder sie nicht zum Überwinden von fehlerhaften Vorstellungen oder Verfahren anregen sollten. Aber das sollte aus einer grundsätzlich stärkenorientierten, wenngleich nicht beschönigenden Perspektive passieren.

Aus solcher stärkenorientierten Sicht wird die Andersartigkeit des Denkens von Kindern nicht als Defizit, sondern als Differenz verstanden. In Spiegel & Selter (2016) wurde in diesem Sinne an vielen Beispielen dokumentiert, dass Kinder bisweilen anders denken, (1) als Erwachsene denken, (2) als Erwachsene es vermuten, (3) als Erwachsene es möchten, (4) als andere Kinder und (5) als sie selbst in anderen Situationen denken. Diese Andersartigkeit ist nicht immer direkt als solche zu erkennen. Das ändert aber nichts an ihrem Vorhandensein.

Aus der Haltung der Stärkenorientierung heraus interessiert also nicht nur die Erkenntnis, dass und wie viele Fehler zu beobachten sind, sondern vielmehr die Frage, wie die Fehler zustande gekommen sind – als Spezialfall der umfassenderen Frage, welche Denkwege die Lernenden einschlagen. Diese gilt es, stärkenorientiert zu verstehen.

**!**

**Rechenfehler sind in der Regel kein Zufall. Sie beruhen häufig auf individuellen und aus der Sicht der Lernenden als sinnvoll erachteten Regeln und Strategien.**

# 2 Diagnose: Denkwege stärkenorientiert verstehen

- Lernen, wie Kinder denken *(kira.dzlm.de/129)*
- Diagnosegeleitet fördern *(pikas-mi.dzlm.de/201)*
- Transparente und kontinuierliche Leistungsfeststellung *(pikas.dzlm.de/172 und /441)*

## 2.1 PROZESSORIENTIERTE DIAGNOSE

Aus der Metastudie von Hattie (2013) kann aus unserer Sicht die Konsequenz gezogen werden, dass sich eine Unterrichtsgestaltung mit den Augen der Lernenden als lernwirksam erwiesen hat. Lehrpersonen sollten über die Kompetenz verfügen, sich in die Lernprozesse hineinzuversetzen, Lernprozesse aus der Perspektive der Lernenden wahrzunehmen und vor diesem Hintergrund unterrichtliche Prozesse gestalten zu können.

Zu den diagnostischen Aufgaben von Lehrpersonen gehört die produktorientierte Lernstandsfeststellung (summativ). Mindestens ebenso relevant für die Lernwirksamkeit von Unterricht ist die prozessorientierte Lernstandsfeststellung, die die Leistungen der Kinder im Rahmen des alltäglichen Unterrichts kontinuierlich und stärkenorientiert betrachtet, um die Erkenntnisse als Grundlage einer Lernförderung nutzen zu können (formativ; Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 32). Somit kann u. E. gefolgert werden, dass evaluative Orientierungen beim Lehren und Lernen einen zentralen Stellenwert haben: Alle Informationen, die Auskunft über Lernmöglichkeiten, Lernstand, Lernprozesse und Lernerträge der Schülerinnen und Schüler liefern, sind von besonderem Interesse.

Es geht also wesentlich darum, Leistungen festzustellen, um Lernende zu fördern (Sundermann & Selter, 2013). Diagnose und individuelle Förderung sind somit aufeinander zu beziehen. Förderung ohne vorangehende Diagnose erfolgt i. d. R. unspezifisch, Diagnose ohne darauf aufbauende Förderung bleibt häufig wirkungslos und führt nicht selten zu Stigmatisierung.

Förderung setzt also an den individuellen Lernpotenzialen wie auch den Schwierigkeiten der Lernenden an. Sie sollte nicht ohne diagnosebasierte Erkenntnisse erfolgen, denn ohne diagnostische Daten lässt sich im konkreten Fall eine bestimmte Fördermaßnahme nicht ableiten. Ohne diagnostische Daten kann auch nicht entschieden werden, in welchen Bereichen und in welcher Reihenfolge das Kind gefördert werden sollte (Wember, 1998, S. 116).

**Tipp:** Auf *pikas-mi.dzlm.de/201* finden Sie weitere Anregungen zu folgenden Themen:
- Diagnosemomente und Fördermomente
- Diagnoseaufgaben und Förderaufgaben
- Planung individueller Förderung
- Diagnosegespräche und Fördergespräche
- Unterrichtsrelevante Tests und Förderung
- Diagnose- und förderorientierte Organisation

Wie Moser Opitz (2010) anmerkt, sind der Ausgangspunkt für die Förderung jedoch nie allein die Diagnosen, sondern fachliche und fachdidaktische Überlegungen, die es ermöglichen, geeignete Diagnoseaufgaben auszuwählen bzw. zu entwickeln, die Ergebnisse zu interpretieren und Fördermaßnahmen zu planen.

Zentrale Grundlage jeglicher Diagnose sind die Fähigkeiten der Lehrperson, die Denkwege der eigenen Kinder zu verstehen. Das gelingt in der Regel besser, wenn sie über Hintergrundwissen darüber verfügt, was typische Denkwege und Fehlermuster von Schülerinnen und Schülern sind. Das ‚KIRA-Buch' bietet hierzu für die zentralen Themen der Grundschulmathematik eine beispielgebundene, systematische Überblicksdarstellung (vgl. das Beispiel aus Götze, Selter & Zannetin, 2019).

Im Folgenden werden mit den Diagnosegesprächen, den Diagnoseaufgaben und den Standortbestimmungen drei Möglichkeiten beschrieben, wie Lehrpersonen im Unterrichtsalltag stärkenorientiert Denkwege verstehen können. Sie können die eher unsystematischen, aber nicht minder wichtigen Beobachtungen im Unterrichtsalltag informativ ergänzen.

| | | |
|---|---|---|
| **Subtraktion der kleineren von der größeren Ziffer** | **„13 – 7 ist gleich 14, denn 7 – 3 sind 4 und dann noch 10 dazu."** | Sehr häufiger Fehler der Subtraktion! Die Kinder denken, dass auch bei der Subtraktion **Zahlen bzw. Ziffern** getauscht werden dürfen, ohne dass es einen Einfluss auf das Ergebnis hat: 3 + 7 = 7 + 3 (Kommutativgesetz) aber 3 - 7 ≠ 7 - 3 |
| **Kippfehler** (falsche Richtung einer Teiloperation) | **„18 – 9 rechne ich über 18 – 10. Das sind 8. Dann sind 18 – 9 insgesamt 7, denn es ist ja eine Minusaufgabe."** | Sehr häufiger Fehler der Subtraktion! Die Kinder sind sich unsicher, wie sie nach einer Ableitung korrigieren müssen. So muss z. B. bei der Ableitung der Differenz von 18 – 9 über 18 – 10 das Ergebnis um 1 **erhöht**, bei einer Ableitung von 19 – 9 um 1 **erniedrigt** werden, um auf das Ergebnis von 18 – 9 zu kommen (Grundvorstellungen werden zentral). |

| | | |
|---|---|---|
| **Zehnerunterschreitung nicht beachtet** | **„12 - 8 sind 14. 15 - 9 sind 16."** | Starke Konzentration auf den Zehnerübergang und die damit verbundene Fokussierung auf den Einer führen dazu, dass der **Zehner im Ergebnis stehen bleibt.** Oft verbunden mit Problemen im Stellenwertverständnis. |

## 2.2 DIAGNOSEGESPRÄCHE

Zunächst sollen die Diagnosegespräche als eine Möglichkeit vorgestellt werden, um mehr über das Denken der Kinder erfahren zu können. Das Ziel von Diagnosegesprächen besteht also darin, dem authentischen Denken von Kindern (Spiegel & Selter, 2016) möglichst genau ‚auf die Spur' zu kommen. Demzufolge unterscheiden sich Diagnosegespräche von den nachfolgenden Fördergesprächen, deren Ziel es ist, Lernprozesse bei den Schülerinnen und Schülern anzuregen. Um die Intention von Diagnosegesprächen in Abgrenzung zu Fördergesprächen zu verdeutlichen, sollen beide Gesprächsformen idealtypisch in einer Tabelle gegenübergestellt werden (Selter, 2017a, S. 391).

| | **Diagnosegespräch** | **Fördergespräch** |
|---|---|---|
| **Ziel** | Denkwege verstehen | Lernfortschritte ermöglichen |
| **Aufgabenstellung** | soll bearbeitet werden | soll richtig gelöst werden |
| **Fragen und Impulse** | dienen der Auslotung des Verständnisses | dienen der aktiven Entwicklung des Verständnisses |
| **Hilfen** | als Hilfen zum Darstellen der eigenen Denkwege | als Hilfen zum Selbstfinden von Erkenntnissen |
| **Fehler** | können stehen bleiben | sollen analysiert und überwunden werden |
| **Hauptaktivität Lehrperson** | beobachten und zuhören | gezielte Impulse setzen, um Lernfortschritte anzuregen |
| **Hauptaktivität Lernende** | Denkwege erklären | neue Denkwege einschlagen |
| **Rückmeldung** | lernstandsorientiert | lernprozessorientiert und zielorientiert |
| **Erklärungen durch Gesprächsleiter** | weitestgehend vermeiden, aber Aufgabenverständnis sichern | im Bedarfsfall notwendig, bedürfen aber der aktiven Einordnung ins bestehende Wissensnetz |

Dabei ist festzuhalten, dass beide Gesprächsformen in der Unterrichtsrealität häufig eng aufeinander folgen bzw. sich auch durchmischen. Entscheidend ist stets, dass Sie als Lehrperson Klarheit darüber haben, ob Sie gerade eher die Intention des Diagnostizierens oder die des Förderns verfolgen. Und wichtig ist zudem, dass das Fördergespräch dem Prinzip des aktiven Lernens folgt und Sie nicht in das Gesprächsverhalten des Beibringens oder des Belehrens verfallen, bei dem versucht wird, den Lernenden unabhängig von deren individuellen Denkwelten den eigenen Denkweg als den bestmöglichen aufzudrängen (Beispiel aus Selter & Spiegel, 1997, S. 49).

**Du kannst doch bestimmt schon zählen, oder?**

**Ja, klar, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (zählt weiter), 26, 27, 28, 90.**

**Was hast du nach der 28 gesagt?**

**Neun … zig.**

**90? Da kannst du aber schon weit zählen. Kannst du nochmal von 23 an weiter zählen?**

**23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 90, 91, 92, …**

**Da hört es auf?**

**Ja.**

**Kannst du auch von 53 aus weiter zählen?**

**53, 54, 56, 57, 58, 59, … 80, 83, 82, 83, 84, 85, 87, …, 89, … elfzig, einundelfzig, dreiundelfzig, sechsundelfzig, … genug...**

- Auf der Website des Projekts KIRA *(Kinder rechnen anders)* sind zahlreiche Informationen zur Gesprächsführung und zur Planung *(kira.dzlm.de/172)*, Durchführung *(173)* und Auswertung *(159)* abrufbar. Weiterhin finden Sie dort exemplarische Leitfäden für die Durchführung von Diagnosegesprächen für die Bereiche Geometrie und Sachrechnen *(161)*, Arithmetik bis zum 2. Schuljahr *(077)* sowie Arithmetik im 3. und 4. Schuljahr *(163)*.

Diagnosegespräche haben den großen Vorteil, dass sie sehr genaue Einblicke in das Denken der Lernenden ermöglichen, und sie haben den großen Nachteil, dass sie vergleichsweise zeitaufwändig sind. Aus diesem Grund können sie im Unterrichtsalltag nur dosiert zum Einsatz kommen. Daher sollen in den folgenden beiden Kapiteln zwei Instrumente beschrieben werden, die es durch die Nutzung der Schriftlichkeit ermöglichen, in vergleichsweise kurzer Zeit vergleichsweise viele Informationen über das Denken der Lernenden zu erhalten: Diagnoseaufgaben und Standortbestimmungen.

## 2.3 DIAGNOSEAUFGABEN

Unter einer Diagnoseaufgabe wird ein Impuls an die Schülerinnen und Schüler verstanden, vorhandene Kompetenzen – etwa in Form von Rechnungen, Texten, bildlichen Darstellungen sowie Kombinationen aus diesen – schriftlich zu artikulieren. Der Begriff ‚Impuls' wird dabei so verstanden, dass die Aufforderung zur Aktivität und zur Verschriftlichung auch aus mehreren Teilen bestehen kann, beispielsweise aus mehreren Rechenaufgaben oder aus dem Aufschreiben einer Begründung, die der Formulierung einer Entdeckung folgt.
Diagnoseaufgaben können schwerpunktmäßig sowohl inhaltsbezogene als auch prozessbezogene Kompetenzen adressieren *(pikas.dzlm.de/097)*.
Diagnoseaufgaben eignen sich u. a. dazu...

- **Kenntnisse zu zeigen**
  Trage die folgenden Zahlen am Rechenstrich ein.

- **Fertigkeiten zu demonstrieren**
  Zeichne einen Kreis mit einem Durchmesser von 5 cm.

- **Aufgaben mit vorgegebenen Bedingungen zu finden**
  Finde fünf Malaufgaben mit dem Ergebnis 1.000.

- **eigene Vorgehensweisen zu beschreiben**
  Schreibe auf, wie du 72 – 19 rechnest.

- **Vorstellungen darzustellen**
  Male ein Bild zur Aufgabe 4 + 5.

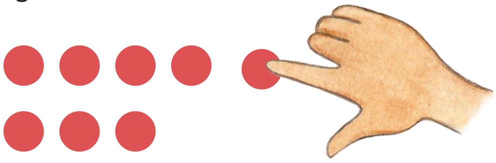
- **Auffälligkeiten zu beschreiben**
  Was fällt dir auf, wenn du die Aufgaben vergleichst?

Die unterrichtliche Umsetzung kann beispielsweise so realisiert werden, dass die Schülerinnen und Schüler zu einem geeigneten Zeitpunkt – zum Beispiel zu Beginn oder am Ende einer Unterrichtsstunde, eines Tages oder einer Lerneinheit – auf einem Blatt Papier Datum und Namen sowie ihre Bearbeitung einer Diagnoseaufgabe festhalten. Dieses Blatt werfen die Kinder anschließend in den sog. Mathe-Briefkasten, einen mit gelbem Papier beklebten Schuhkarton mit Schlitz (Sundermann & Selter, 2013).
Diagnoseaufgaben können geordnet für jedes Kind gesammelt werden, um Lernentwicklungen zu dokumentieren. Von zentraler Bedeutung ist dabei, dass es sich dabei nicht um Lernzielkontrollen handelt, sondern um ein diagnostisches Instrument, das eine informative Grundlage für die zielgerichtete Förderung der einzelnen Kinder bildet. Es ist auch möglich, die Kinder zu bitten, dieselbe Diagnoseaufgabe zweimal oder sogar mehrfach in zeitlichem Abstand zu bearbeiten, so dass sich Entwicklungen erkennen lassen. Im Folgenden (S. 13) geben wir jeweils eine Diagnoseaufgabe für sechs zentrale Inhalte des Arithmetikunterrichts in der Grundschule an – weitere Beispiele finden Sie auf *pikas.dzlm.de/097.*

## 2.4 STANDORTBESTIMMUNGEN

Standortbestimmungen dienen wie Diagnosegespräche oder Diagnoseaufgaben der fokussierten Feststellung individueller Lernstände zu bestimmten Zeitpunkten im Unterrichtsprozess. Dabei werden in der Regel Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten zu einem Rahmenthema (z. B. Orientierung im Tausenderraum, Entdeckerpäckchen) ermittelt, dessen Behandlung im Unterricht bevorsteht (Eingangs-Standortbestimmung) bzw. – vorläufig – abgeschlossen ist (Abschluss-Standortbestimmung; Sundermann & Selter, 2013, S. 18ff.). Es lässt sich zusammenfassend sagen, dass Standortbestimmungen am Lerngegenstand strukturierte Zusammenstellungen von aufeinander abgestimmten Diagnoseaufgaben sind.
Unter schriftlichen Standortbestimmungen werden solche verstanden, bei denen während der Bearbeitung kein Austausch mit den Kindern über ihre Lösungen und Lösungswege stattfindet, man also bei der Analyse auf die schriftlichen Dokumente allein angewiesen ist.
Auch die Durchführung einer Eingangs-Standortbestimmung hat eine diagnostische Funktion; sie dient

**Zahlverständnis**
Lege 8 Plättchen hin.



**Operationsverständnis**
Welche Rechenaufgabe siehst du in dem Bild?

**Stellenwertverständnis**
Lege die Zahl 46.

Lege einen Zehner hinzu, wie lautet die Zahl jetzt?

**10 mehr, das sind 56.**

**Einspluseins und Einsminuseins**
Wie viel ist 8 + 5?

**8 + 5 = 13.**

Und wie viel ist 13 – 5?

**13 - 5 = 8. Weil eben war 8 + 5 = 13.**

**Addition im Hunderterraum**
Rechne aus: 32 + 45

30 + 40 = 70
2 + 5 = 7

**Sind 77.**

Rechne aus: 32 + 49

30 + 40 = 70
2 + 9 = 11

**Sind 81.**

**Einsdurcheins**
Drei Kinder teilen sich 24 Bonbons.
Wie viele bekommt jedes Kind?

15 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

**Jedes Kind bekommt 8.**

ausschließlich zur differenzierten Planung des weiteren Unterrichts. Eine Rückgabe der Eingangs-Standortbestimmungen an die Kinder mit Bepunktung oder Benotung ist kontraproduktiv! Sofern eine Eingangs- und eine Abschluss-Standortbestimmung durchgeführt werden, ist es sinnvoll, beide analog aufzubauen und dieselben Zahlenwerte zu verwenden. So können sowohl die Lehrpersonen als auch die Kinder Lernfortschritte leichter erkennen und sehen, in welchen Bereichen sich gute und ggf. auch weniger zufriedenstellende Lernentwicklungen ergeben haben.
Standortbestimmungen geben den Lehrpersonen strukturierte Informationen über die Lernstände einzelner Kinder. Indem die individuellen Lernstände genauer beobachtet und besser verstanden werden, wird es leichter, den Unterricht daran zu orientieren und die Grundlage für eine individuelle Förderung zu schaffen *(pikas.dzlm.de/098).*
Aber auch für die Lernenden haben Standortbestimmungen eine wichtige Funktion, denn sie tragen zudem dazu bei, dass die Kinder zunehmend Transparenz über ihr eigenes Lernen erhalten können: Was kann ich schon? Was muss ich noch lernen? Was habe ich dazu gelernt?
Im Folgenden geben wir die Beispielaufgaben an, die für eine Standortbestimmung zur Addition im 100er-Raum verwendet werden könnten – weitere Beispiele finden Sie auf *pikas.dzlm.de/098*.

| Aufgabe | Kommentar |
|---|---|
| **24 + 5** | Zu einer zweistelligen Zahl ist eine einstellige Zahl zu addieren, ohne dass dabei der nächste Zehner überschritten werden muss. |
| **33 + 9** | Die Aufgabenanforderungen sind vergleichbar, nur dass hierbei der nächste Zehner (die 40) überschritten wird. |
| **41 + 35** | Zwei zweistellige Zahlen müssen addiert werden, es ist kein Zehnerübergang erforderlich. |
| **37 + 43** | Hier sind ebenfalls zwei zweistellige Zahlen zu addieren; das Ergebnis ist eine Zehnerzahl. |
| **44 + 29** | Auch hier sind zwei zweistellige Zahlen zu addieren; dabei ist der nächste Zehner zu überschreiten. Möglich ist auch die Lösung: + 30 und dann – 1. |
| **25 + 26** | Auch bei der letzten Aufgabe sind zwei zweistellige Zahlen mit Übertrag zu addieren. Möglich ist auch, die Hilfsaufgabe 25 + 25 zu nutzen. |

**!**

**Standortbestimmungen, Diagnoseaufgaben, Diagnosegespräche und Unterrichtsbeobachtungen haben dieselbe Funktion: Leistungen feststellen, um Kinder fachlich fördern zu können.**

# 3 Förderung: Lernprozesse zielbewusst anregen

- **Lernen als aktiver Prozess** *(kira.dzlm.de/017)*
- **Fachbezogene Sprachbildung (ZR 0 bis 100)** *(pikas.dzlm.de/476)*
- **Diagnose- und Fördermaterial** *(mathe-sicher-koennen.dzlm.de/002)*

> **‚Lernprozesse zielbewusst anzuregen' meint, dass der Unterricht den Schülerinnen und Schülern hinreichend viel Zeit und Raum für ein selbstgesteuertes, zielorientiertes Lernen geben sollte. (Spiegel & Selter, 2016)**

## 3.1 LERNEN ALS AKTIVER PROZESS

Es kann als grundlegende Erkenntnis der Forschung gelten, dass Lernen nicht als Übernahme von fertigem Wissen, sondern als ein stets aktiver, konstruktiver, individueller Prozess stattfindet. Selbst dann, wenn Schülerinnen und Schüler einer Erzählung eines Erwachsenen zuhören oder einige Seiten in einem Sachbuch lesen, bedarf es eigener Konstruktionen, damit sie etwas lernen – nicht nur dann, wenn sie auf sich selbst gestellt versuchen, ein herausforderndes Problem zu bewältigen. Das bedeutet: Wie auch immer agiert wird, Lernerfolge der Kinder können nicht erzwungen werden. Auch noch so ausgefeilte Lernarrangements können nicht garantieren, dass Lernen stattfindet. Aber es kann die Wahrscheinlichkeit dafür erhöht werden, dass sich Lernen ereignet. Voraussetzung dafür ist, dass eine Orientierung an der Konstruktivität menschlichen Lernens erfolgt und die Lernenden zur (gedanklichen) Aktivität angeregt werden.

Der Begriff des aktiven Lernens wird jedoch bisweilen fehlinterpretiert: Aktives Lernen ist erstens nicht mit körperlicher Aktivität gleichzusetzen. Der wichtigere Part beim aktiv-entdeckenden Lernen ist die geistige Aktivität der Kinder, in der das Entdecken von Zusammenhängen im Mittelpunkt steht. Entsprechend sind das Hüpfen von Plusaufgaben, das Ausmalen eines Rechenbildes und Aktivitäten wie Eckenrechnen nicht im Sinne des aktiv-entdeckenden Lernens.

Zweitens kann nicht alles aktiv entdeckt werden. So gibt es im Mathematikunterricht bestimmte Konventionen, Bezeichnungen, Sprech- und Schreibweisen oder auch die Rechenvorschriften in Aufgabenformaten, die nur in Ansätzen selbst erschlossen werden können. Dies muss die Lehrperson im Unterricht berücksichtigen. Und drittens brauchen Lernende die Unterstützung der Lehrperson und den Austausch mit Mitlernenden, um aktiv entdeckend lernen zu können. Entdeckendes Lernen bedeutet nicht, die Lernenden sich selbst und sog. Selbstlernmaterialien zu überlassen.

Viele engagierte Pädagoginnen und Pädagogen sind zwar der Überzeugung, dass die Kinder, die am meisten Schwierigkeiten im Unterricht haben, nicht nur besondere Zuwendung brauchen, sondern auch didaktisch-kleinschrittig angelegte Programme. Jedoch: „Solche Förderkonzepte mißverstehen kindliches Denken in doppelter Weise: Sie zerlegen sinnvolle Handlungen in isolierte Teilleistungen und versuchen, sie über kleinschrittige Übungen wieder aufzubauen, statt Grundqualifikationen des Arbeitens und Lernens zu entwickeln (...). Sie steigern die Hilflosigkeit der Kinder und ihre Abhängigkeit, indem sie den Belehrungsunterricht intensivieren (an dem diese Kinder gescheitert sind), statt ihre Kompetenzen zu nutzen und alternative Erfahrungs- und Lernmöglichkeiten anzubieten. Durch diese didaktische Brille erscheinen Kinder, die vom Durchschnitt abweichen, als Mängelwesen" (Brügelmann, 1997, S. 21).

Das Lernen der Kinder, die Rechenschwierigkeiten haben, weist zwar Besonderheiten auf. Die Gesetze des Lernens sind aber keine grundsätzlich anderen. Allen Kindern sollte somit individuelles und gemeinsames Lernen ermöglicht werden (Brügelmann, 1997).

Um nicht missverstanden zu werden: Wir sind nicht der Meinung, besondere Lernschwierigkeiten bedürften nicht auch einer besonderen Beachtung. Aber die Förderung sollte weitestgehend im Unterricht erfolgen und das Übel an der Wurzel packen: Vorbeugen ist besser als nachsteuern. Und wenn Förderung außerhalb der Schule stattfindet, wird sie umso erfolgreicher sein, wenn sie an die schulischen Konzepte anknüpft.

> **Tatsächlich sind diese Kinder eher ‚belehrungsschwach' als ‚lernschwach'. (Erich Wittmann)**

## 3.2 DIAGNOSEGELEITET, VERSTEHENSORIENTIERT, KOMMUNIKATIONSFÖRDERND

Für den Unterricht im Allgemeinen wie für eine gezielte Förderung bei Anzeichen und zur Verhinderung von besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen ist Folgendes relevant. Um Wirksamkeit entfalten zu können, sollte die Förderung der Schülerinnen und Schüler an den Verstehensgrundlagen ansetzen und substantielle Erarbeitungs- bzw. Aufarbeitungsmöglichkeiten bieten (Prediger, Freesemann, Moser Opitz & Hußmann, 2013). Ein schlichtes „Du musst mehr üben“ oder „Du musst dich mehr anstrengen“ hilft häufig nicht weiter. Gerade für Kinder mit Rechenschwierigkeiten sind aus unserer Sicht drei Leitideen zentral (Selter, Prediger, Nührenbörger & Hußmann, 2014).

- **Diagnosegeleitetheit:** Die Förderung setzt an den individuellen Lernpotenzialen und Lernbedürfnissen wie auch den Schwierigkeiten der einzelnen Lernenden an. Sie sollte nicht ohne diagnosebasierte Erkenntnisse durchgeführt werden, denn ohne diese lässt sich schwerlich entscheiden, wie die Fördermaßnahmen im Detail angelegt werden sollen.

- **Verstehensorientierung:** Schwierigkeiten im aktuellen Unterrichtsstoff resultieren oftmals daraus, dass die Lernenden zum basalen Lernstoff nur unzureichende Vorstellungen besitzen und daher dazu neigen, sich ausschließlich an auswendig gelernten Regeln, Verfahren oder Fakten zu orientieren. Daher sollten den Lernenden genügend Anlässe geboten werden, auch auf Erfahrungen aus früheren mathematischen Lernprozessen zurückzublicken und diese dahingehend zu reflektieren bzw. neu zu erleben, dass grundlegende strukturelle Beziehungen wiederentdeckt und tragfähig genutzt werden können. Das heißt nicht, dass sie alles vollständig selbst herausfinden müssen. Erfassen heißt nicht zwangsläufig eigenständig entdecken, sondern schon aktives Einordnen in die eigenen Kompetenzen. Das kann auch durch Nachvollzug passieren. Die Lernenden sollten also Gelegenheiten erhalten, Verständnis aufbauen zu können, und nicht nur Verfahren unverstanden beherrschen.

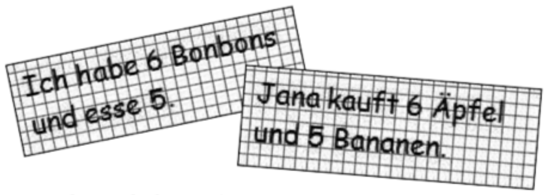
- **Kommunikationsförderung:** Der Aufbau von Verständnis bedarf gerade bei Lernenden mit Rechenschwierigkeiten der Kommunikation. Sie benötigen gezielte Lernanregungen, die in Einzelarbeit häufig nicht zu erhalten sind. Die Gespräche reduzieren sich somit nicht auf die Mitteilung von Lösungsprozeduren oder Ergebnissen, sondern haben vielmehr die Beschreibungs-, Erklärungs- und Begründungskontexte für mathematische Zusammenhänge als Kern. Dabei geht es sowohl um die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler untereinander als auch um die mit der Lehrperson.

Diese drei Leitideen bilden den konzeptionellen Rahmen für das Projekt ‚Mathe sicher können‘, das eng miteinander vernetztes Diagnose- und Fördermaterial entwickelt hat.

- Weitere Informationen zu diesen Leitideen und zum Projekt ‚Mathe sicher können’ finden Sie unter *pikas.dzlm.de/253* oder direkt unter *mathe-sicher-koennen.dzlm.de*

**4.4 Passt die Rechengeschichte?**

Zu der Aufgabe **6 · 5** hat Rico Rechengeschichten erfunden.




a) Passen Ricos Rechengeschichten zu der Aufgabe **6 · 5**? Begründe deine Entscheidung.

b) Erfinde eine eigene Rechengeschichte, die zu der Mal-Aufgabe passt.

c) Erfinde eine eigene Rechengeschichte mit den Zahlen 6 und 5, die **nicht** zu der Aufgabe **6 · 5** passt.

d) Tauscht eure Geschichten aus b) und c) miteinander. Erkennt dein Partner, welche deiner Geschichten passt und welche nicht?

BEISPIELAUFGABEN aus *Mathe sicher können*, Baustein N4, Operationsverständnis Multiplikation: *mathe-sicher-koennen.dzlm.de/002*

## 3.3 MATHEMATIKFÖRDERUNG DURCH SPRACHFÖRDERUNG

Das Entstehen von besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen kann auch dadurch unterstützt werden, dass die Lernenden nicht über die notwendigen sprachlichen Voraussetzungen verfügen. Schülerinnen und Schüler können sich zwar im Alltag häufig ohne Probleme verständigen. Die Alltagssprache, über die sie verfügen, ist aber häufig kontextgebunden und vollzieht sich in der Regel mündlich. Sie ist gekennzeichnet durch unvollständige Sätze und Zeigegesten, die durch Adverbien wie ‚hier' oder ‚da' verstehbar werden (Götze, 2015, S. 9).

In der Schule reichen diese Fähigkeiten jedoch bisweilen nicht aus, um erfolgreich zu sein, denn die Unterrichtssprache ist eine spezialisierte Sprache mit für die Lernenden neuen (Summand) oder anders zu deutenden Fachbegriffen (Seite, Unterschied), mit Oberbegriffen (ein Quadrat ist immer auch gleichzeitig ein Viereck, aber nicht jedes Viereck ist ein Quadrat), abstrakten Pronomen (man, es, niemand oder jede/r), Substantivierungen (das Ergänzen), Komposita (Zahlenmauer, Flächeninhalt), Passivkonstruktionen in vollständigen Sätzen (Die Zahlen werden vertauscht), komplexeren Satzstrukturen (wenn…, dann…) oder Konjunktionen (während, nachdem).

An den Beispielen in den Klammern wird deutlich, dass einerseits die fachübergreifende Bildungssprache, die auch in Mathematik verwendet wird und andererseits die mathematikunterrichtsbezogene Fachsprache, die nur dort behandelt wird, unterschieden werden müssen. In diesem Sinne ist Fachsprache also für alle Kinder gleichermaßen (Meyer & Prediger, 2012; Götze, 2015, S. 21) …

- **ein Lernziel bzw. ein Lerngegenstand,** denn die Fachsprache der Mathematik soll gemäß der KMK-Bildungsstandards (KMK, 2005) und Lehrpläne verbindlich erworben und genutzt werden,
- **ein Lernmedium,** denn jede Verständigung über Mathematik erfolgt sprachlich (mündlich oder schriftlich), aber auch
- **eine Lernhürde,** denn oft sind die Diskrepanzen zwischen Alltags- und Fachsprache für Schwierigkeiten im Unterricht wesentlich mitverantwortlich.

Lernen geschieht also immer sprachlich vermittelt und reflektiert. Auch wenn Kinder beispielsweise lernen, sich auf der Hundertertafel zu orientieren oder vorgegebenen Punktefeldern Einmaleinsaufgaben zuzuordnen – also vorwiegend inhaltsbezogene Kompetenzen angesprochen sind –, findet Lernen von und durch Sprache statt.

In der Hundertertafel stehen alle Zahlen von 1 bis ______.

Bei den Zahlen in einer Spalte sind immer alle ____________ gleich.

Alle Zahlen in der 5. Spalte haben an der Einerstelle eine ___.

In einer Spalte werden die Zahlen immer um ____ größer.

In der letzten ___________ stehen nur glatte Zehnerzahlen.

Bei 9 Zahlen in einer Zeile sind die___________ gleich.

In einer Zeile werden die Zahlen immer um _____ größer.

Fülle die Lücken aus.

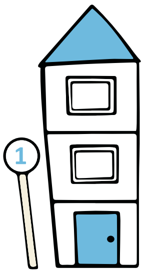
1 100 5 10 Zehner Einer Spalte

Fachliches und sprachliches Lernen sind stets eng miteinander verknüpft. Das bedeutet aber auch: Das Fach Deutsch schafft zwar wichtige sprachliche Grundlagen, es kann aber nicht auf die in der Mathematik benötigten Fachbegriffe und fachsprachlichen Redemittel vorbereiten. Insofern ist durchgängige Sprachbildung also auch ein wichtiges Prinzip des Mathematikunterrichts. Der Erwerb der Bildungs- und Fachsprache bei Kindern mit Deutsch als Zweitsprache benötigt mehrere Jahre und reicht weit über die Grundschulzeit hinaus. Die Ausdrucksweise wird zunehmend abstrakter und unpersönlicher, viele Begriffe werden erweitert bzw. ausdifferenziert. Das Begriffspaar ‚Ganzes-Teile' z. B. wird beginnend mit dem Aufbau des Verständnisses von ‚Zerlegen' (in zwei beliebig große Teilmengen) im ersten Schuljahr über das Aufteilen des Ganzen in gleich große Teilmengen im zweiten Schuljahr bis hin zum Verständnis der Beziehung zwischen dem Ganzen und den Teilen bei Brüchen in der Sekundarstufe I erweitert. Durchgängige Sprachbildung ist nicht nur etappen- und institutionsübergreifend zu verstehen, sondern auch fächerübergreifend. Nicht nur auf der Inhaltsebene muss also spiralförmig und übergreifend gedacht und geplant werden, sondern auch auf der sprachlichen Ebene.

Damit der in der Grundschule erarbeitete mathematische Fachwortschatz nachhaltig und auch noch für den Übertritt in die weiterführenden Schulen verfügbar ist, muss für den sprachlichen Lernprozess genügend Zeit eingeräumt werden – Zeit für die Einführung und Veranschaulichung, aber auch für die Sicherung, Übung und Anwendung (vgl. die Darstellung des WEGE-Konzepts, Selter, 2017, S. 65ff.).

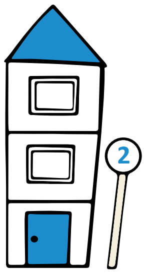
## 3.4 LEITIDEEN GUTEN MATHEMATIKUNTERRICHTS

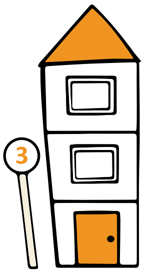
Die Materialien des Projekts PIKAS basieren auf zehn Leitideen guten Mathematikunterrichts. Diese werden in zehn Häusern näher ausgeführt und durch Beispiele konkretisiert (Selter, 2017).




**Mehr als nur rechnen**
Guter Mathematikunterricht fördert durchgängig sowohl prozessbezogene als auch inhaltsbezogene Kompetenzen und trägt so zu einem Bild von Mathematik als ‚Wissenschaft von den Mustern' bei.

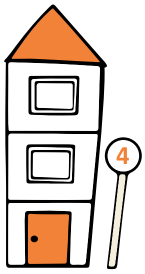
**Lernprozesse langfristig anlegen**
Guter Mathematikunterricht erleichtert das Lernen, indem vom Elementarbereich bis in die Sekundarstufen auf Kontinuität bei der Auswahl der grundlegenden Ideen, Inhalte, Materialien und Aufgaben geachtet wird.

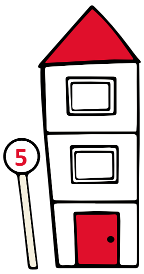



**Rechenschwierigkeiten vermeiden**
Guter Mathematikunterricht verwendet hinreichend viel Zeit für verständnisbasierte Übungen zur Vermeidung von Rechenschwierigkeiten und bei deren Auftreten für eine diagnosegeleitete, verständnisorientierte und kommunikationsanregende Förderung.

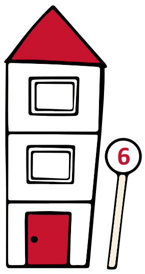
**Matheunterricht sprachbildend gestalten**
Guter Mathematikunterricht betreibt Sprachbildung als eine zentrale Aufgabe auch des Mathematikunterrichts und orientiert sich dabei am *WEGE*-Konzept (*W*ortspeicher, *E*inschleifübungen, *G*anzheitliche Übungen, *E*igenproduktionen).

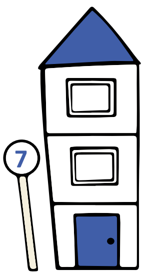



**Offenheit und Zielorientierung verbinden**
Guter Mathematikunterricht ermöglicht es den Lernenden, ausgehend von ihren individuellen Lernständen und ihren unterschiedlichen Lernmöglichkeiten vorgegebene Kompetenzerwartungen eigenaktiv zu erreichen.

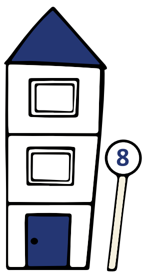
**Heterogenität als Herausforderung nutzen**
Guter Mathematikunterricht sieht Heterogenität als Herausforderung, die nicht in Vereinzelung der Lernenden mündet, sondern für Prozesse des zielorientierten individuellen Lernens und des Lernens von- und miteinander genutzt werden sollte.

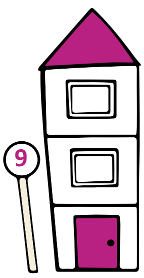



**Herausfordern statt beschäftigen**
Guter Mathematikunterricht verwendet gute Aufgaben, die ggf. an die unterschiedlichen Lernmöglichkeiten der Lernenden angepasst werden müssen, damit diese die angestrebten inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzerwartungen erreichen können.

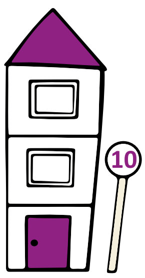
**Lernende aktiv einbeziehen**
Guter Mathematikunterricht ermöglicht es den Lernenden durch eine zielorientierte Unterrichtsführung, den Unterricht und ihren eigenen Lernprozess in zunehmendem Maße aktiv und selbstverantwortlich mitzugestalten.




**Lernen stärkenorientiert wahrnehmen**
Guter Mathematikunterricht stellt individuelle Lernstände kontinuierlich und stärkenorientiert fest und nutzt diese Grundlage für die Planung, Durchführung und Reflexion des Unterrichts.

**Mehr unterstützen als überprüfen**
Guter Mathematikunterricht unterstützt die Lernenden durch eine individuumsbezogene sowie zunehmend auch anforderungsbezogene Leistungsbeurteilung sowie eine sachorientierte, dialogische Leistungsrückmeldung.



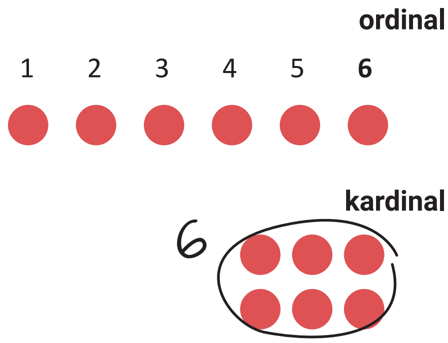
# 4 Zahlverständnis

- Zahlvorstellungen erwerben *(primakom.dzlm.de/310)*
- Zahlvorstellungen (ZR 0 bis 100) *(pikas-mi.dzlm.de/420)*
- Diagnose- und Fördermaterial *(mathe-sicher-koennen.dzlm.de/002)*, Module N1 und N2

Eine zentrale Zielsetzung des Mathematikunterrichts in der Primarstufe besteht darin, dass die Lernenden sicher rechnen können. Die Lernenden sollen Fakten und Verfahren aber nicht ohne Sinn und Verstand auswendig lernen. Sie sollen sich stattdessen unter dem, was sie tun, immer auch etwas vorstellen können. In der Schuleingangsphase sollten die Kinder ein tragfähiges Zahlverständnis aufbauen.

## 4.1 GRUNDVORSTELLUNGEN BESITZEN

Als erster Baustein der Entwicklung von Zahlverständnis ist der Erwerb von Grundvorstellungen zu nennen, die man auch Zahlaspekte nennen kann (Schipper, 2009, S. 68ff.).




Der *ordinale Zahlaspekt* meint, dass die Zahlen eine Reihe bilden und entsprechend mit Hilfe von linearen Repräsentationen dargestellt werden können (wie Hunderterkette, Zahlenstrahl, ...). Zentral für die Weiterentwicklung des ordinalen Zahlverständnisses ist die sichere Beherrschung des Aufsagens der Zahlwortreihe. So wird die Anzahl von Objekten zunächst durch das ordinale Zuordnen zur Reihe der Zahlwörter ermittelt. Jedem Objekt wird genau ein Zahlwort zugeordnet und das letztgenannte Zahlwort gibt die Anzahl an. Im weiteren Lernprozess kommt es dann darauf an, das ordinale Zahlverständnis weiterzuentwickeln.

Der *kardinale Zahlaspekt* als zweiter zentraler Zahlaspekt bedeutet, dass Zahlen als Anzahlen erfasst und anfänglich in gruppenweisen, später häufig in flächigen Darstellungen repräsentiert werden (wie Punktefelder, Rechtecksdarstellungen, ...). Damit die Lernenden die Anzahlen von Objekten nicht durch einzelnes Auszählen ermitteln, sondern die Strukturen der Darstellungsmittel nutzen, müssen sie Fähigkeiten in der simultanen bzw. der quasi-simultanen Zahlauffassung besitzen.

Mit der *simultanen Zahlauffassung* ist gemeint, dass Anzahlen auf einen Blick erkannt werden können – eine Fähigkeit, die bei Schulanfängerinnen und Schulanfängern in der Regel für Anzahlen bis 4 oder 5 ausgeprägt ist (Schipper, 2009, S. 72). In der Schule sollten die Kinder dann lernen, andere Stützpunkt-Anzahlen wie 5, 10, 20 oder 100 in strukturierten Darstellungen wie Zwanziger-, Hunderter- oder Tausenderfeldern auf einen Blick zu erkennen (Kap. 4.3). Im Sinne eines kardinalen Zahlverständnisses sollten den Lernenden hinreichend viele Anregungen zur Entwicklung nicht zählender Rechenstrategien gegeben werden (Selter & Zannetin, 2018, S. 58ff.). Somit sind die beiden zentralen Grundvorstellungen zu natürlichen Zahlen, dass Zahlen als Positionen *(Ordinalzahl)* oder als Mengenangabe *(Kardinalzahl)* verstanden werden können (Wartha & Schulz, 2014, S. 34). Weitere Grundvorstellungen von Zahlen sind in der folgenden Übersicht angeführt (Selter & Zannetin, 2018, S. 33).

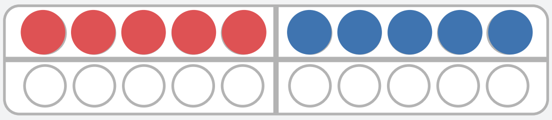
| | |
|---|---|
| **Wie viele?**<br>Malin hat 4 Stifte.<br><br>KARDINALZAHLASPEKT<br>(Anzahl von Dingen) | **Wie häufig?**<br>Kim geht fünfmal in den Keller.<br><br>KARDINALZAHLASPEKT<br>(Anzahl von Ereignissen) |
| **Die nächste Zahl?**<br>1,2,3,...<br><br>ORDINALZAHLASPEKT<br>(Zählzahl) | **Das wievielte?**<br>Das siebte Plättchen.<br><br>ORDINALZAHLASPEKT<br>(Ordnungszahl) |
| **Wie groß/schwer?**<br>Das Ei kostet 20 Cent.<br><br>MASSZAHLASPEKT | **Das wievielfache?**<br>Herr Knoll ist dreimal so alt wie Cem.<br><br>OPERATORZAHLASPEKT |
| **Welche Nummer?**<br>58285 Gevelsberg<br><br>CODIERUNGSZAHLASPEKT | **Welches Ergebnis?**<br>71 – 32=<br><br>RECHENZAHLASPEKT |

# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Haben die Lernenden ausreichend Gelegenheit, sich mit unterschiedlichem Material zu den verschiedenen Zahlaspekten auseinanderzusetzen, wie z. B. mit Alltagsgegenständen (Muscheln, Kastanien, Muggelsteine) oder Plättchen für den Kardinalzahlaspekt sowie Rechenstrich, Zahlenstrahl etc. für den Ordinalzahlaspekt?
- Bietet mein Unterricht hinreichend viele Möglichkeiten, die Zuordnung zur Reihe der Zahlwörter zu nutzen und zu vertiefen (Ordinalzahlaspekt)?
- Bietet mein Unterricht vielfältige Möglichkeiten, Zahlen als Anzahlen zu erfassen (Kardinalzahlaspekt)?
- Welche Anregungen bietet mein Schulbuch zu den verschiedenen Zahlaspekten? Werden diese in angemessener Gewichtung und ausreichend thematisiert?

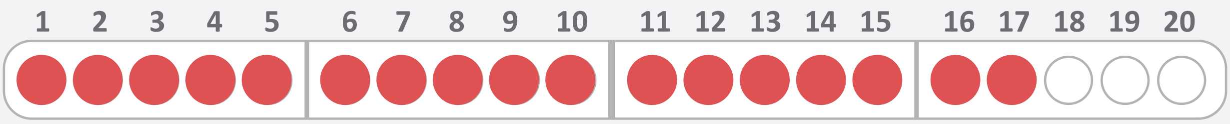
## UNTERRICHTSANREGUNG ‚WIE VIELE AUF EINEN BLICK?'



Aktivitäten am Zwanzigerfeld dienen der Übung der quasi-simultanen Anzahlerfassung und sprechen den Kardinalzahlaspekt an. Sie nutzen Versprachlichungen, um kurz gesehene Plättchenanzahlen mental zu rekonstruieren, indem sie z. B. erklären: „Ich habe eine volle Reihe gesehen" *(pikas.dzlm.de/075)*.

## WEITERE ANREGUNGEN

- Im Zwanzigerfeld zu einer vorgegebenen Zahl Plättchen legen bzw. Punkte zeichnen
- Spiel ‚Hamstern' *(pikas.dzlm.de/003)*
- Anzahlen in Wimmelbildern bestimmen




## UNTERRICHTSANREGUNG ‚MUSTER AN DER ZWANZIGERREIHE'

Um den Ordinalzahlaspekt anzusprechen, sind diverse Übungen an der Zwanzigerreihe denkbar: Zählen in Schritten, vorwärts und rückwärts zählen, Vorgänger und Nachfolger ablesen, später auch Nachbarzehner bestimmen.

## WEITERE ANREGUNGEN

- Muster von Zahlenreihen legen, aufschreiben und fortsetzen, wie z. B. 3, 6, 9, 12, …
- Muster von gelegten Zahlenreihen mündlich beschreiben und begründen („Immer 2 weiter.")
- Zahlen ordnen („5 ist größer als 3.")
- Abstände von Zahlen berücksichtigen („Um 3 größer.")
- Spiele für die Matheecke: alle Würfelspiele, bei denen eine Spielfigur weitergezogen wird, wie z. B. Pferderennen, Lotti Karotti, Mensch-ärgere-dich-nicht, …
- Übungen zum verbalen Zählen *(pikas-mi.dzlm.de/424)*
- Zahlenkarten ordnen *(pikas-mi.dzlm.de/424)*
- Spiele, bei denen eine Anzahl an Gegenständen, Bildern etc. erfasst werden muss *(pikas.dzlm.de/435)*, wie z. B. Halli Galli oder Vier gewinnt
- Muster legen *(pikas-mi.dzlm.de/424)*

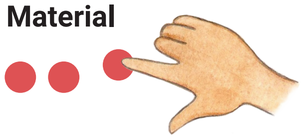
## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage, …

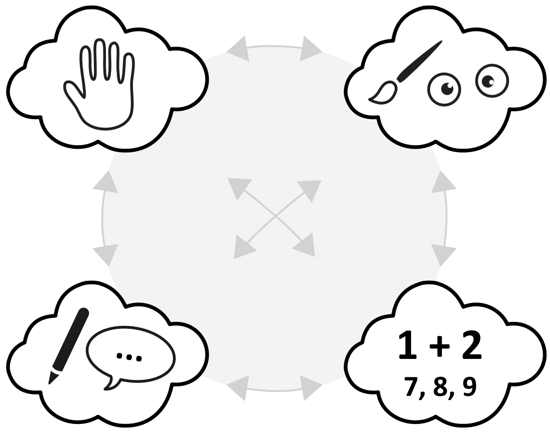
- vorwärts, rückwärts, in Schritten zu zählen?
- Zahlen der Größe nach zu ordnen (am Rechenstrich, Zwanzigerreihe, Zahlenstrahl)?
- Anzahlen bis 20 simultan oder quasi-simultan zu erfassen?
- Darstellungen von Anzahlen bis 20 zu beschreiben („Oben 10, unten 2")?

## 4.2 DARSTELLUNGEN VERNETZEN

Der Erwerb eines gesicherten Zahlverständnisses umfasst zweitens die Fähigkeit zum Darstellungswechsel. Zahlen können bekanntlich in unterschiedlichen Darstellungsformen repräsentiert werden: durch Handlungen mit Material, durch bildliche Darstellungen, durch Darstellungen in gesprochener oder geschriebener Sprache sowie durch Mathesprache (symbolische Darstellungen).

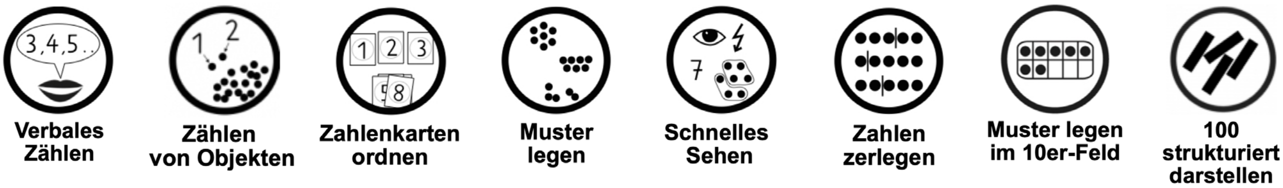
| Material | Bild | Sprache | Mathesprache |
|---|---|---|---|
|  |  | drei | 3 |

Diese Darstellungen sind nicht in streng linearer Abfolge zu durchlaufen. Natürlich sollen die Lernenden im Verlauf ihres Lernprozesses immer souveräner im Umgang mit den symbolischen Darstellungen werden. Aber sie sollten den Bezug zu den nicht-symbolischen Repräsentationen nicht verlieren. Insofern gilt es im Unterricht, die verschiedenen Darstellungsformen immer wieder wechselseitig zu vernetzen.
Die Lernenden sollten also sowohl die Fähigkeit zum Umgang mit symbolischen Darstellungen auf einer ausreichenden Verständnisgrundlage erwerben als auch diese immer wieder durch Anregungen zum Darstellungswechsel mit Inhalt füllen können (vgl. die Abbildung in Anlehnung an Kuhnke, 2012, S. 32).




Die Abbildung verdeutlicht, dass zum einen die Wechsel von einer in eine andere Darstellungsform und zurück bedeutsam sind (‚Male ein Bild zur 3.' ‚Wie viele Kastanien siehst du auf dem Bild?'). Zum anderen ist es wichtig, innerhalb einer Darstellungsform von einem Darstellungsmittel in ein anderes zu übersetzen, also zum Beispiel die bildliche Darstellung von 3 Plättchen mit der von 3 Kastanien zu vergleichen.

- Das Projekt *Mathe inklusiv* bietet zahlreiche Anregungen zum Aufbau eines tragfähigen Zahlverständnisses, insbesondere zum Darstellungswechsel. Neben einer sog. Basisaufgabe werden exemplarisch mögliche Adaptionen der Basisaufgaben, d. h. vertiefende Aufgabenstellungen, mögliche Reduktionen und Erweiterungen der Anforderungen angegeben, so dass jeweils die inhaltliche Bandbreite der Aufgabenstellung deutlich wird.
Material: *pikas-mi.dzlm.de/424*



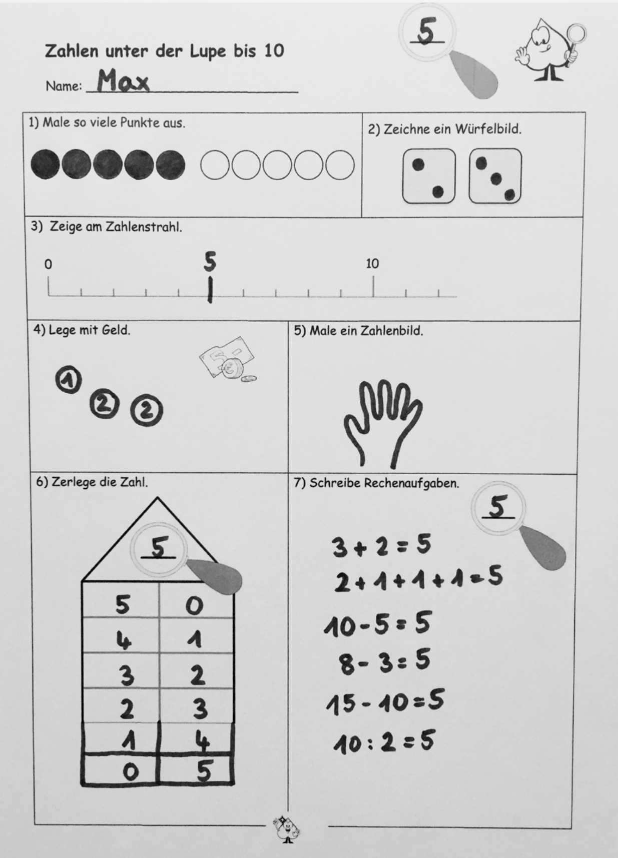

*pikas-mi.dzlm.de/424*

# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Haben die Lernenden ausreichend Gelegenheit, die unterschiedlichen Darstellungen (Material, Bild, Sprache, Mathesprache) kennenzulernen sowie innerhalb und auch zwischen den Darstellungsformen zu vernetzen?
- Bietet mein Klassenraum vielfältige Materialien aus der Lebenswelt der Kinder an, wie z. B. Kastanien, Muggelsteine, Murmeln, die sie auch bildlich darstellen können?
- Bietet mein Klassenraum mathematikdidaktische Materialien an, wie z. B. Zwanzigerreihe, Rechenrahmen, Zwanzigerfeld mit Plättchen, die auch bildliche Darstellungen ermöglichen?
- Welche Anregungen bietet mein Schulbuch, um Darstellungswechsel herauszufordern?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚ZAHLEN UNTER DER LUPE‘



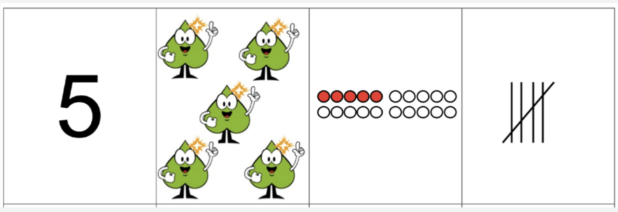

Bei dieser Aktivität führen die Lernenden verschiedene vorgegebene und freie Untersuchungen zu einer Zahl durch. Die jeweilige Zahl muss auf unterschiedliche Art dargestellt werden. Dabei entwickeln und erweitern sie ihr Zahlverständnis durch unterschiedliche Zahldarstellungen, durch flexibles Wechseln zwischen und innerhalb der unterschiedlichen Zahldarstellungen und durch das Entdecken von Beziehungen zwischen Zahlen *(pikas.dzlm.de/411)*. Die Abbildung gibt einen Eindruck, was Lernende in die jeweiligen Felder eintragen könnten.

## WEITERE ANREGUNGEN

**• ANLEGEN EINES ZAHLENALBUMS**

Die Lernenden schreiben die Zahlen von 0 bis 9 in ihrer korrekten Schreibweise. Sie machen erste Zerlegungsübungen auf ikonischer und symbolischer Ebene und sprechen über unterschiedliche Zahldarstellungen und Zahlaspekte [kardinal (Plättchen bzw. Punktedarstellung), ordinal (Zahlenreihe), Rechenzahl (Zahlzerlegungen)]: „Ich habe einen Punkt gemalt.“ „Ich weiß schon, dass 0 + 1 = 1 ist.“ *(pikas.dzlm.de/075)*

**• ERSTELLEN EINES ZAHLENQUARTETTS**




Die Lernenden vergleichen Darstellungen miteinander und ordnen verschiedene Darstellungen einer bestimmten Zahl zu *(pikas.dzlm.de/083)*. Dies passiert in Anlehnung an die Regeln eines Quartettspiels, die auch zu einem Trio- oder Duo-Spiel vereinfacht werden können.

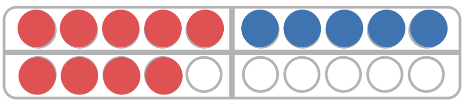
## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage, …

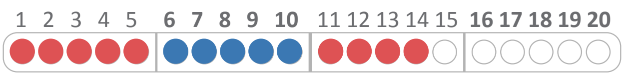
- die Ziffern von 0 bis 9 bzw. die Zahlwörter bis 20 zu schreiben?
- den Zahlsymbolen das gesprochene Zahlwort, eine bildliche oder eine Materialdarstellung zuzuordnen?
- allgemein: zwischen unterschiedlichen Zahldarstellungen zu wechseln?
- über verschiedene Zahldarstellungen zu sprechen und diese zu vergleichen?
- eine Anzahl mit Hilfe verschiedener Materialien darzustellen?

## 4.3 ZAHLBEZIEHUNGEN NUTZEN

Als drittes wesentliches Element des Zahlverständnisses ist die Nutzung von Zahlbeziehungen zu sehen. Die Zahl ‚8' beispielsweise ist der Vorgänger der 9 und der Nachfolger der 7, das Doppelte der 4 und die Hälfte von 16, zwei weniger als 10, drei mehr als 5 usw. Zudem lässt sie sich zerlegen in 4 und 4, in 6 und 2, in 3 und 5 usw.
Gerade diese sog. Teil-Teil-Ganzes-Zahlbeziehungen (3, 5, 8), also die flexiblen mentalen Zahlvorstellungen, sind für den Unterricht von besonderer Bedeutung (Gaidoschik, 2010; Gerster & Schultz, 2004, S. 78ff.). Denn das Verständnis und die Nutzung der Teil-Teil-Ganzes-Beziehungen sind eine wichtige Grundlage dafür, dass die Beziehung zwischen einer Zahl (dem Ganzen) und ihren Teilen numerisch erfasst werden kann.
Mit jeder Dreier-Zahlengruppe lassen sich nun vier verschiedene Grundaufgaben (3 + 5; 5 + 3; 8 – 3; 8 – 5) bilden, außerdem Variationen wie 3 + __ = 8 oder 8 – __ = 5. Die Entwicklung der Fähigkeit zur Betrachtung von Zahlen in Teil-Teil-Ganzes-Beziehungen gilt als zentrale Herausforderung eines verständnisorientierten Mathematikunterrichts. Denn ein fehlendes oder nur teilweise ausgeprägtes Teil-Teil-Ganzes-Verständnis ist eine häufige Fehlerquelle beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben.
Einsicht in Zahlbeziehungen gewinnen die Lernenden durch Aktivitäten an geeigneten Materialien, die die Strukturen unseres Zahlsystems verkörpern.

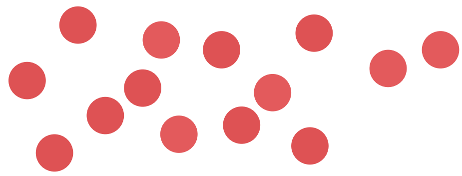


ZWANZIGERFELD

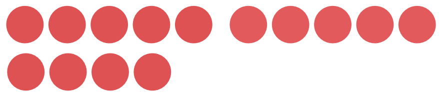



ZWANZIGERREIHE
Strukturierung in Fünfer und Zehner

Als eines der zentralen Ziele der Schuleingangsphase kann die Entwicklung der Fähigkeit gelten, Anzahlen strukturiert zu erfassen. Die Fähigkeit, die Anzahl von mehreren Objekten auf einen Blick zu erfassen, ohne dass diese einzeln gezählt werden müssen, wird bekanntlich als simultane Anzahlerfassung bezeichnet (Kap. 4.1). Kinder können in der Regel bis zu vier oder auch fünf nur sehr kurz und ungeordnet dargebotene Objekte gleichzeitig erfassen und – falls sie über die Kenntnis der Zahlwörter verfügen – das zugehörige Zahlwort angeben (Gaidoschik, 2010).
Von der Simultanerfassung zu unterscheiden ist das quasi-simultane Erfassen von Anzahlen (Gerster & Schultz, 2004). Kinder sind in der Regel dann in der Lage, auch die Anzahl einer größeren Menge von Objekten ohne Abzählen direkt zu bestimmen, wenn sie die Menge visuell in einzelne Untergruppen unterteilen und diese letztlich gedanklich wiederum zu der Gesamtmenge zusammensetzen (Anzahlerfassung auf den zweiten Blick). Diese Prozesse erleichtert gutes Material durch seine Strukturierung in Fünfer und Zehner (Wittmann & Müller, 2009).



ANZAHLERFASSUNG ERSCHWERT



ANZAHLERFASSUNG ERLEICHTERT

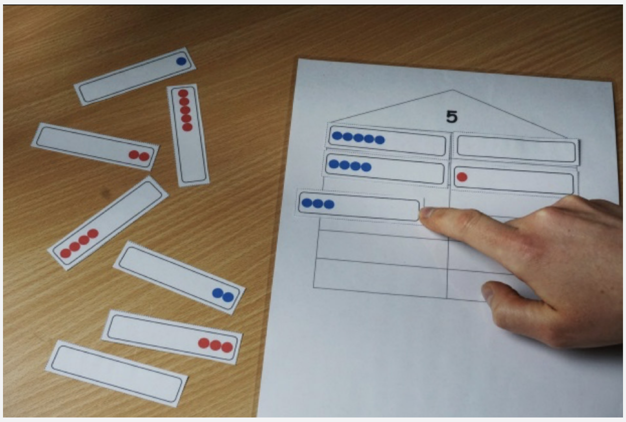
Die Fähigkeit zur quasi-simultanen bzw. strukturierten Anzahlerfassung ist deshalb von so grundlegender Bedeutung, da erst durch sie der Aufbau geeigneter innerer Bilder und mentaler Vorstellungen der verschiedenen Anzahlen, d. h. der Aufbau eines tragfähigen Zahlverständnisses und die Entwicklung von nicht zählenden Rechenstrategien, ermöglicht wird. Je besser ein Kind die gruppenweise Anzahlbestimmung beherrscht, desto leichter, schneller und sicherer kann es später rechnen (Wittmann & Müller, 2009, S. 3).

# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Haben die Lernenden ausreichend Gelegenheit, an verschiedenen Materialien (Zwanzigerfeld, Hunderterfeld, Zahlenhäuser, Fingerbilder, …) Zahlbeziehungen zu entdecken und zu beschreiben?
- Bietet mein Unterricht die Möglichkeit, dass die Kinder Teil-Teil-Ganzes-Zahlbeziehungen und Fähigkeiten zur strukturierten Anzahlerfassung durch verschiedene Zahlzerlegungen aufbauen können?
- Welche Anregungen bietet mein Schulbuch, um Zahlbeziehungen und strukturierte Anzahlerfassungen (Kraft der 5, Zehnerstruktur) zu nutzen?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚ZERLEGUNGSHÄUSER'




Das Zerlegungshaus und die benötigten Kärtchen mit den Punktefeldern liegen vor den Lernenden auf dem Tisch. Sie legen die zusammengehörigen Kärtchen sortiert in das Haus. Das Kind kann dazu angeregt werden, zu erklären, wie es die entsprechende Zahl schnell finden konnte (strukturierte Anzahlerfassung) oder wie es die Kärtchen sortiert hat.
Die Lernenden können weitere Darstellungen für die Zahlzerlegung nutzen und im Zerlegungshaus ordnen (z. B. symbolische Darstellung oder Fingerbild).
Karten mit Additionsaufgaben können dem Zerlegungshaus zugefügt werden. Verschiedene Zahlenhäuser können miteinander verglichen werden, z. B. unter der Frage, warum sie unterschiedlich viele Etagen haben *(pikas-mi.dzlm.de/224)*.

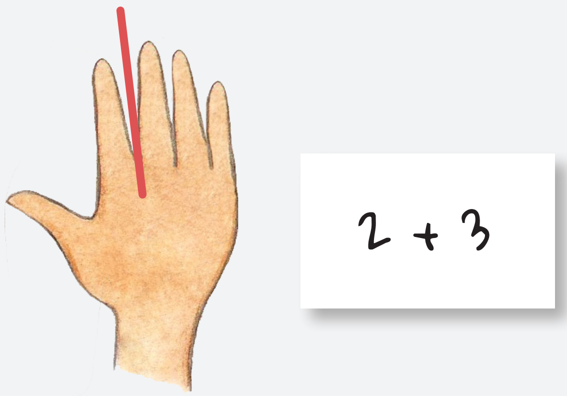
## WEITERE ANREGUNGEN

- Verschiedene Zahlen im Zwanzigerfeld oder an der Zwanzigerreihe legen, zeichnen und anschließend miteinander vergleichen
- Verschiedene Anordnungen einer Zahl im Zwanzigerfeld thematisieren
- Verschiedene Zahlen unter Berücksichtigung von Strukturen zum schnellen Sehen (Nutzen der Kraft der 5, Zehnerstrukturen etc.) darstellen
- Muster legen *(pikas-mi.dzlm.de/424)*
- Zahlen zerlegen *(pikas-mi.dzlm.de//424)*
- Muster legen im Zehnerfeld *(pikas-mi.dzlm.de/424)*

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage, …

- Zahlen mit Hilfe von Plättchendarstellungen bzw. Punktefeldern an der Zwanzigerreihe und an Fingerbildern zu zerlegen (Teil-Teil-Ganzes-Zahlbeziehung)?




Fingerbild symbolische Darstellung

- Zahlen auf der symbolischen Ebene zu zerlegen?
- Zahlen mit Hilfe von Punktefeldern oder Darstellungen an der Zwanzigerreihe auf- und absteigend zu sortieren?
- Beziehungen zwischen (An-)Zahlen herzustellen?
- Strukturen zum Erkennen und zum Darstellen von Anzahlen zu nutzen (Kraft der 5, Zehnerstruktur)?

# 5 Operationsverständnis

- Operationsverständnis aufbauen *(primakom.dzlm.de/351)*
- Über welche Operationsvorstellungen Kinder verfügen *(kira.dzlm.de/180 und 181)*
- Diagnose- und Fördermaterial *(mathe-sicher-koennen.dzlm.de/002)*, Module N3 und N4

Neben einem Zahlverständnis sollen die Lernenden in der Schuleingangsphase ein tragfähiges Verständnis von Rechenoperationen aufbauen. Die Notwendigkeit dieser Zielsetzung ist aus mindestens zwei Gründen gegeben. *Erstens* hat sich gezeigt, dass ein nicht-tragfähiges Operationsverständnis häufig bei denjenigen Lernenden zu beobachten ist, die Schwierigkeiten in Mathematik haben (Schipper, 2005, S. 53). Anders herum: Mit Hilfe eines tragfähigen Operationsverständnisses können Kinder leichter lernen, Rechenaufgaben richtig zu bearbeiten und sich deren Resultate oder Wege zur Ergebnisermittlung dauerhafter zu merken (Gaidoschik, 2007, S. 69f.). Und *zweitens* wird ein tragfähiges Operationsverständnis immer wieder im weiterführenden Mathematikunterricht benötigt: Ein Kind, das über keine Vorstellungen von 3 · 5 verfügt, wird mit hoher Wahrscheinlichkeit auch keine Vorstellungen von 1,5 · 2,5 oder von $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}$ oder allgemein von a · b entwickeln können (Selter & Zannetin, 2018, S. 55).

## 5.1 GRUNDVORSTELLUNGEN BESITZEN

Zur Entwicklung eines tragfähigen Operationsverständnisses müssen sogenannte Grundvorstellungen zur Rechenoperation aufgebaut werden. Unter Grundvorstellungen kann man hier die für das Mathematiklernen wichtigen Bedeutungszuschreibungen verstehen, die dazu beitragen, dass die Kinder sich unter einer Rechenoperation konkrete Aktivitäten vorstellen können und das Rechnen nicht auf das Manipulieren mit Symbolen reduzieren. In der Übersicht aus Selter & Zannetin (2018, S. 47) werden wichtige Grundvorstellungen zu den vier Rechenoperationen aufgeführt.
Natürlich sollen die Schülerinnen und Schüler nicht lernen, die unterschiedlichen Grundvorstellungen explizit zu benennen („Das ist eine Aufgabe zum Aufteilen."). Aber Sie als Lehrpersonen sollten diese Unterschiede kennen, um Aufgaben einzusetzen, die die unterschiedlichen Grundvorstellungen repräsentieren, und auch, um Schwierigkeiten zu erkennen, die Lernende haben können. Verfügt ein Kind beispielsweise bei der Addition nur über die Grundvorstellung des dynamischen Hinzufügens, so könnte es durchaus Schwierigkeiten bei Aufgaben des eher statischen Vergleichens bekommen. Dadurch dass die Lernenden Sachaufgaben bzw. Rechengeschichten mit vielfältigen Sachkontexten kennenlernen und – anders herum – Rechenaufgaben Sachsituationen zuordnen, kann diesen entgegengewirkt werden (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2012, S. 29).

| **Addition** | **Subtraktion** |
|---|---|
| Beim Hinzufügen wird einer Menge von Objekten eine weitere hinzugefügt, während beim Zusammenfassen zwei Mengen zusammengelegt und beim Vergleichen zwei Mengen durch Addition verglichen werden. | Bei der Grundvorstellung des Abziehens werden Objekte weggenommen, sodass ein Rest entsteht, während beim Ergänzen ein Unterschied dynamisch und beim Vergleichen statisch bestimmt wird. |
| **Hinzufügen**: Indra hat 4 Äpfel. Sie bekommt 5 Äpfel geschenkt. Wie viele hat sie jetzt?<br>**Zusammenfassen:** Paul hat 3 Sticker. Gülcan hat 4 Sticker. Wie viele Sticker haben sie zusammen?<br>**Vergleichen:** Im Haus sind 5 Kinder. Im Garten sind 3 Kinder mehr. Wie viele Kinder sind im Garten? | **Abziehen**: Anna hat 15 Sticker, sie verschenkt 3. Wie viele Sticker hat sie jetzt?<br>**Ergänzen:** Milena hat 9€, eine Fahrkarte kostet 11€. Wie viel Euro benötigt Milena noch, um eine Fahrkarte kaufen zu können?<br>**Vergleichen:** Jan hat 6 Bonbons. Maren hat 4 Bonbons. Wie viele Bonbons hat Jan mehr? |
| **Multiplikation** | **Division** |
| Beim Wiederholen werden Gruppen gleicher Größe zusammengefasst (auch zeitlich-sukzessiv), während beim Zusammenfassen Anzahlen gleicher Größe gruppiert und deren Gesamtzahl ermittelt wird (auch räumlich-simultan). Beim Vergleichen werden zwischen Anzahlen oder Größen multiplikative Vergleiche hergestellt. | Beim Aufteilen ist die Größe der zu bildenden Gruppen bekannt, und deren Anzahl zu bestimmen. Beim Verteilen ist es umgekehrt. Die Anzahl der Gruppen ist bekannt und deren Größe muss ermittelt werden. |
| **Wiederholen:** Max isst jeden Tag 2 Brötchen. Wie viele Brötchen isst er an 5 Tagen?<br>**Zusammenfassen:** Erdinc hat 3 Beutel. In jedem Beutel sind 4 Orangen. Wie viele Orangen hat er insgesamt?<br>**Vergleichen:** Thea hat 3 Bonbons. Mila hat dreimal so viele. Wie viele Bonbons hat Mila? | **Aufteilen**: In der Turnhalle sind 20 Kinder. Sie bilden Vierergruppen. Wie viele Gruppen werden gebildet?<br>**Verteilen:** In einer Tüte sind 24 Bonbons. 3 Kinder teilen sich die Bonbons. Wie viele Bonbons erhält jedes Kind? |

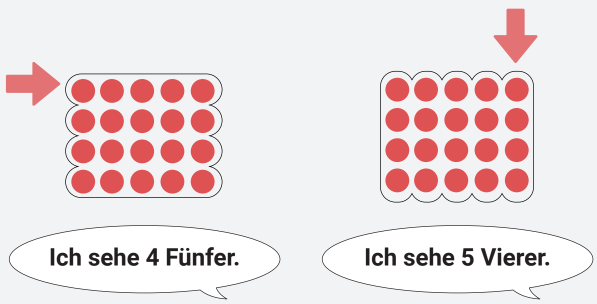
# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Berücksichtige ich in meinem Unterricht die unterschiedlichen Grundvorstellungen, und haben die Lernenden ausreichend Zeit bzw. Anlässe, eine Grundvorstellung aufzubauen, bevor symbolischen Darstellungen eine größere Bedeutung zukommt?
- Werden in meinem Unterricht hinreichend viele Gesprächsanlässe geschaffen, um Zusammenhänge zwischen Sachsituationen und Rechenoperationen zu verdeutlichen?
- Welche Grundvorstellungen werden in meinem Schulbuch angesprochen?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚MAL-SITUATIONEN'

Zur Förderung beispielsweise des Operationsverständnisses der Multiplikation können verschiedene alltägliche Situationen oder Verpackungen mit multiplikativer Struktur wie beispielsweise Eiswürfelformen, Pralinenschachteln, Eierkartons usw. genutzt werden, um passende Additionsaufgaben mit gleichen Summanden sowie Multiplikationsaufgaben zu finden.
Zudem bieten Darstellungen mit rechteckiger Anordnung von Gegenständen oder Punkten die Möglichkeit zur Thematisierung der Rechteckstruktur und zum Darstellen und Erkennen von Tauschaufgaben.




## WEITERE ANREGUNGEN

- Lebensweltliche Handlungserfahrungen aus Spiel- und Alltagssituationen der Kinder zu Rechenoperationen sammeln (verkaufen, kaputtgehen, gerecht verteilen, geschenkt bekommen usw.), aufgreifen und besprechen
- Im Unterricht Situationen nachspielen, um konkrete Situationen mit den Rechenoperationen zu verknüpfen: „Welche Rechenart könnte sich hinter der Situation verbergen?"
- Bildkartei mit Sachsituationen zu den Rechenoperationen einsetzen, die zugeordnet und als Gesprächsanlass genutzt werden können: „Warum passt das Bild/die Situation zu der Rechnung $3 + 5 = 8$? Passt es auch zu $8 - 5 = 3$? Warum (nicht)?"
- Eigene Fotokartei erstellen (z. B. Additions- oder Multiplikationsaufgaben in der Umwelt)
- ‚Signalwörter' zu den Rechenoperationen sammeln (z. B. zur Addition: hinzufügen, zusammenfassen, sammeln, geschenkt bekommen etc.) und darüber sprechen
- Pasch würfeln *(pikas-mi.dzlm.de/node/637)*

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

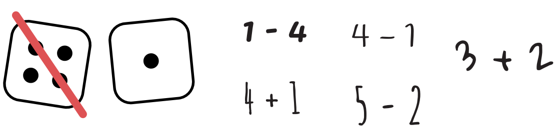
Inwiefern ist das Kind in der Lage, …

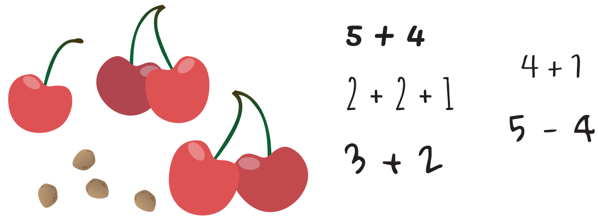
- in Alltagssituationen und Gegenständen Rechenoperationen zu erkennen?
- unterschiedliche Grundvorstellungen zu den Operationen (z. B. Subtraktion als Abziehen, Ergänzen, Vergleichen) nachzuvollziehen?
- Sachsituationen einer Rechenoperation (begründet) zuzuordnen?
- zu einer Sachsituation die passende Rechenaufgabe zu notieren?

## 5.2 DARSTELLUNGEN VERNETZEN

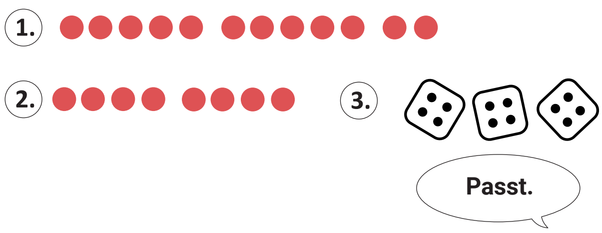
Wie beim Zahlverständnis gilt auch bei der Entwicklung des Operationsverständnisses die Fähigkeit zum Darstellungswechsel als wesentliche Komponente. Auch nach der Automatisierung des sog. kleinen Einspluseins sollten die Lernenden dann beispielsweise in der Lage sein, zu einem Zahlensatz eine **Handlung** (nach) zu vollziehen (Legen von 4 plus 3 Plättchen), eine **verbale Darstellung** zu interpretieren oder zu erfinden (4 Kinder springen Seil, 3 Kinder kommen dazu) oder ein **Bild** zu deuten oder zu erstellen (4 Kinder und 3 Kinder). Wichtig bei allen Aktivitäten zum Darstellungswechsel ist es, immer auch darüber zu reflektieren und zu reden: „Warum passt das (nicht)? Was ändert sich, wenn ...?" etc.


Für die unterschiedlichen Darstellungen gilt: Sie sind einerseits Lernhilfe, da sie es den Schülerinnen und Schülern erleichtern, allgemeine, universelle, mathematische Begriffe zu erwerben. Sie sind andererseits aber stets auch Lernstoff. Denn es gibt keine simple Eins-zu-eins-Zuordnung zwischen Darstellungsmittel und mathematischem Begriff, keine Einbahnstraße vom ‚Konkreten' zum ‚Abstrakten': Der abstrakte mathematische Begriff muss durch einen geistigen Akt in das Darstellungsmittel hineingelesen werden. Dessen Bedeutung sowie die Formen des Umgangs mit ihm müssen von den Schülerinnen und Schülern erst erlernt werden.
Zur Illustration: Wir haben Lernenden zu Beginn des zweiten Schuljahres verschiedene bildliche Darstellungen vorgelegt und sie gebeten, eine dazu passende Rechenaufgabe zu nennen. Können Sie die abgedruckten Antworten der Kinder nachvollziehen (Selter & Zannetin, 2018, S. 69)?




Insgesamt erwiesen sich beide Bilder als keineswegs eindeutig für die Lernenden, auch wenn diese die Rechenanforderungen, die veranschaulicht werden sollten (5 – 4 und 9 – 4), durchaus bewältigen können. Was für bildliche Darstellungen gilt, gilt auch für die anderen Darstellungsformen: Sie sind keineswegs selbsterklärend. Über sie und den damit verbundenen Darstellungswechsel muss im Unterricht gesprochen werden.
Es hat sich gezeigt, dass Kinder beim Darstellungswechsel auf unterschiedliche Kriterien achten. Im Folgenden wird dies, anhand der Beispielaufgabe, passende bildliche Darstellungen zu der vorgegebenen Aufgabe 3 · 4 auszuwählen, verdeutlicht (Kuhnke, 2012).



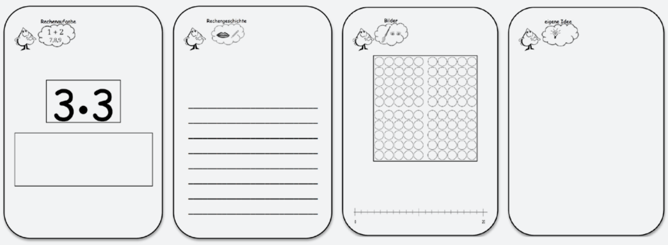

Erstaunlich und nicht zu vernachlässigen ist die Tatsache, dass viele Kinder bereits einzelne Malaufgaben kennen, bevor die Multiplikation im Unterricht eingeführt wird. Daher ist es nicht verwunderlich, dass einige Kinder beim Darstellungswechsel von symbolischen und bildlichen Darstellungen auf das Gesamtergebnis achten. Dementsprechend ‚passen' Darstellungen für sie zusammen, wenn beide dasselbe Ergebnis haben. Beispielsweise werden alle Darstellungen mit 12 Elementen – unabhängig von deren Anordnung – der Aufgabe 3 · 4 zugeordnet (vgl. 1. Beispiel).
Manche Kinder fokussieren besonders auch einzelne Elemente, die in beiden Darstellungen vorkommen müssen. Sie nehmen zum Beispiel die 4 in den Blick und wählen weitere Darstellungen aus, bei welchen mehrmals 4 zu sehen sind (vgl. 2. Beispiel).
Wichtig ist die Nutzung einer bedeutungsbezogenen Sprache: 3 Vierer oder 3 Vierergruppen, und erst später 3 mal 4.

# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Haben die Lernenden ausreichend Gelegenheit, sich mit den Darstellungsmitteln (auch als Lernstoff) auseinanderzusetzen, und wissen sie, wie sie diese angemessen nutzen können?
- Bietet mein Unterricht die Möglichkeiten, vielfältige Darstellungswechsel durchzuführen, über diese zu sprechen und sie zu begründen?
- Welche Darstellungsmittel werden in meinem Schulbuch über die vier Schuljahre hinweg verwendet?
- Welche Darstellungsmittel sollten in meinem Unterricht ggf. noch ergänzt werden?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚MALQUARTETT'

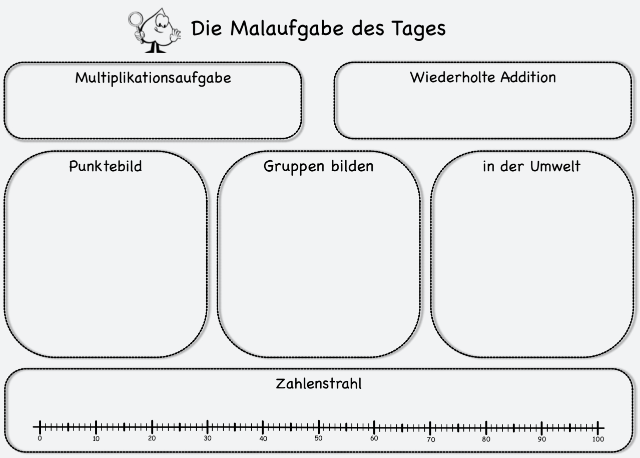



**Rechenaufgabe** **Rechengeschichte** **Bild** **eigene Idee**

Beim Spiel ‚Malquartett' fertigen die Kinder zunächst zu einer Multiplikationsaufgabe verschiedene Darstellungen an und erstellen so Spielkarten. Diese bieten Anlass, sich über verschiedene Darstellungen auszutauschen: „Was passt warum (nicht)?" Das Üben des Darstellungswechsels kann durch das Zuordnen verschiedener Darstellungen zu einer Multiplikationsaufgabe erfolgen. Darüber hinaus können die Spielkarten auch als Bingo, Memory oder Domino eingesetzt werden *(pikas.dzlm.de/252)*.

## WEITERE ANREGUNGEN

- Darstellungen erstellen und zuordnen (z. B. „Erfinde eine Rechengeschichte zur Aufgabe 6 · 5. Male ein passendes Bild. Lege mit Plättchen. Welche andere Darstellung passt zum Bild?")
- Gesprächsanlässe unter der zentralen Frage: „Warum passt das Bild zur Aufgabe?" (und umgekehrt) regelmäßig in den Unterricht integrieren
- Drei-Bild-Geschichten zur Addition oder Subtraktion nutzen (z. B. aus (alten) Mathematikbüchern Bildgeschichten ausschneiden und auf Karteikarten kleben oder eigene Geschichten erstellen und fotografieren)
- Spiel ‚Minustrio' (Minusaufgabe – Zwanzigerfeld – selbstgemaltes Bild) *(primakom.dzlm.de/353)*
- Als ritualisierte Übung ‚Die Malaufgabe des Tages' einsetzen, um eine Malaufgabe regelmäßig in verschiedene Darstellungsformen zu übersetzen




## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage, …

- die eingesetzten Darstellungsmittel als Lernhilfe zu nutzen?
- eine Darstellung einer Operation in eine andere zu übertragen?
- ausgeführte Darstellungswechsel zu erklären?
- beim Darstellungswechsel alle Elemente einer Aufgabe zu berücksichtigen und sich nicht nur auf einen Einzelaspekt zu beschränken?

## 5.3 AUFGABENBEZIEHUNGEN NUTZEN

Als dritte Komponente des Operationsverständnisses ist die Nutzung von Beziehungen – einerseits zwischen Aufgaben, andererseits aber auch zwischen den Rechenoperationen – von besonderer Bedeutung für die Entwicklung eines tragfähigen Operationsverständnisses. Ohne diese können sich sichere und flexible Kompetenzen im Rechnen nicht entwickeln. Zum Rechnen allgemein und insbesondere zum Erlernen des schnellen Kopfrechnens ist es wichtig, Beziehungen zwischen Aufgaben herzustellen bzw. zu sehen, um die Ergebnisse bereits beherrschter Aufgaben zur Berechnung anderer Aufgaben zu nutzen. Dabei spielen Rechengesetze der elementaren Arithmetik eine besondere Rolle (vgl. die folgenden Beispiele aus Selter & Zannetin, 2019, S. 61). Die Lernenden können diese verwenden, ohne die Gesetze in der allgemeinen Formulierung kennen zu müssen.

| **Kommutativgesetz** | | **Assoziativgesetz** | |
|---|---|---|---|
| **Addition:** Die Summanden einer Additionsaufgabe können vertauscht werden, ohne dass sich das Ergebnis ändert. | $9 + 2 = 2 + 9$<br>$a + b = b + a$ | **Addition:** Die Summanden einer (mehrgliedrigen) Additionsaufgabe können beliebig miteinander verbunden werden. | $(6 + 8) + 2 = 6 + (8 + 2)$<br>$(a + b) + c = a + (b + c)$ |
| **Multiplikation:** Die Faktoren einer Multiplikationsaufgabe können vertauscht werden, ohne dass sich das Ergebnis ändert. | $8 \cdot 2 = 2 \cdot 8$<br>$a \cdot b = b \cdot a$ | **Multiplikation:** Die Faktoren einer (mehrgliedrigen) Multiplikationsaufgabe können beliebig miteinander verbunden werden. | $(7 \cdot 4) \cdot 5 = 7 \cdot (4 \cdot 5)$<br>$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ |
| *Das* **Kommutativgesetz** *gilt nicht für die Subtraktion (7 – 3 ist ungleich 3 – 7) und auch nicht für die Division (8 : 4 ist ungleich 4 : 8).* | | *Das* **Assoziativgesetz** *gilt nicht für die Subtraktion, denn (7 – 3) – 2 = 4 – 2 = 2 ist ungleich 7 – (3 – 2) = 7 – 1 = 6 und auch nicht für die Division: (32 : 4) : 2 = 8 : 2 = 4 ist ungleich 32 : (4 : 2)= 32 : 2 = 16.* | |
| **Distributivgesetz** | | **Konstanzgesetz** | |
| **Addition/ Multiplikation bzw. Division:** Eine Summe wird mit einem Faktor multipliziert (durch einen Divisor dividiert), indem jeder Summand mit dem Faktor multipliziert (durch diesen dividiert) wird und die Resultate addiert werden. | $8 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 3 \cdot 7$<br>$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$<br>$84 : 7 = 70 : 7 + 14 : 7$<br>$(a + b) : c = a : c + b : c$ | **Addition:** Das Ergebnis ändert sich nicht, wenn man eine Zahl vergrößert und die andere entsprechend verkleinert. | $9 + 5 = 10 + 4$<br>$a + b = (a + n) + (b - n)$ |
| | | **Subtraktion:** Das Ergebnis ändert sich nicht, wenn man beide Zahlen um dieselbe Zahl vergrößert (oder verkleinert). | $14 - 9 = 15 - 10$<br>$(a - b) = (a + n) - (b + n)$ |
| **Subtraktion/Multiplikation bzw. Division:** Eine Differenz wird mit einem Faktor multipliziert (durch einen Divisor dividiert), indem Minuend und Subtrahend mit dem Faktor multipliziert (durch diesen dividiert) werden und die Resultate voneinander subtrahiert werden. | $9 \cdot 8 = 10 \cdot 8 - 1 \cdot 8$<br>$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$<br>$294 : 3 = 300 : 3 - 6 : 3$<br>$(a - b) : c = a : c - b : c$ | **Multiplikation:** Das Ergebnis ändert sich nicht, wenn man eine Zahl multipliziert und die andere entsprechend dividiert. | $25 \cdot 12 = 50 \cdot 6$<br>$a \cdot b = (a \cdot n) \cdot (b : n)$ |
| | | **Division:** Das Ergebnis ändert sich nicht, wenn man beide Zahlen durch dieselbe Zahl dividiert (oder entsprechend multipliziert). | $72 : 4 = 36 : 2$<br>$a : b = (a : n) : (b : n)$ |
| *Analog gilt das* **Distributivgesetz** *bei der Multiplikation auch, wenn der zweite Faktor „zerlegt" wird. Die Zerlegung des Divisors funktioniert aber in der Regel nicht.* | | | |

Bedeutsam sind des Weiteren die Zusammenhänge zwischen den Rechenoperationen. Die Multiplikation beispielsweise kann man als wiederholte Addition gleicher Summanden verstehen ($4 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7$). Sie bildet gleichzeitig die Umkehroperation der Division, was die Lösung von Divisionsaufgaben mit Hilfe der Multiplikation zu einer häufig zu beobachtenden Lösungsstrategie macht ($36 : 4 = 9$, weil $9 \cdot 4 = 36$).

# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Berücksichtige ich in meinem Unterricht die Betrachtung von Strukturen und Beziehungen zwischen Aufgaben (z. B. Nachbaraufgaben 5 + 6, 6 + 6, 7 + 6) sowie zwischen Rechenoperationen (z. B. Umkehroperationen 5 + 4 = 9 und 9 – 4 = 5)?
- Bieten sich den Lernenden vielfältige Möglichkeiten, Gesetzmäßigkeiten aufzudecken (z. B. das Konstanzgesetz in Aufgabenserien wie: 10 + 2, 9 + 3, 8 + 4, …)?
- Gebe ich den Lernenden Werkzeuge an die Hand (z. B. Forschermittel; *pikas.dzlm.de/392*), um Beziehungen darzustellen?
- In welcher Form werden Aufgabenbeziehungen und Gesetzmäßigkeiten in meinem Schulbuch thematisiert und veranschaulicht?
- Beziehungen zwischen Nachbaraufgaben auf der 1+1- und 1·1-Tafel aufdecken
- Aufgabenkarten nach einfachen und schwierigen Aufgaben sortieren (z. B. einfache und schwierige Multiplikationsaufgabe) und darüber sprechen
- Beziehungen zwischen Rechenoperationen (materialgestützt) veranschaulichen, z. B. wiederholte Addition und Multiplikation 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 und 5 · 3 = 15 oder Umkehroperation zwischen Division und Multiplikation 15 : 3 = 5, denn 5 · 3 = 15
- Übungsformate (Rechendreiecke, Zahlenmauern, Mal-Plus-Häuser etc.) einsetzen und zum Entdecken von Mustern und Strukturen nutzen *(pikas.dzlm.de/195 oder 026)* – gemeinsam darüber sprechen

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚ENTDECKERPÄCKCHEN'

Entdeckerpäckchen ermöglichen das Aufdecken von Mustern und Strukturen zwischen Aufgaben. Mit Hilfe von Forschermitteln können die Lernenden ihren Blick fokussiert auf Beziehungen zwischen Aufgaben richten, Entdeckungen hervorheben, die Veränderungen der Summanden beschreiben und die Auswirkung auf das Ergebnis begründen *(pikas.dzlm.de/edp)*.

**Markiere mit Farben:**

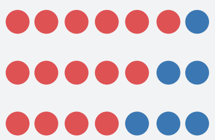
6 + 1 = 7
5 + 2 = 7
4 + 3 = 7

**Markiere mit Pfeilen:**

6 + 1 = 7
−1 +1 ?
5 + 2 = 7
−1 +1 ?
4 + 3 = 7

**Du kannst Plättchen nutzen, um zu erkären, was dir auffällt.**

6 + 1 = 7
5 + 2 = 7
4 + 3 = 7



## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage, …

- Beziehungen zwischen Aufgaben zu erkennen?
- mit Hilfe von Darstellungsmitteln Aufgabenbeziehungen darzustellen (z. B. mit Plättchen Tauschaufgaben der Multiplikation darstellen)?
- Forschermittel einzusetzen, um Beziehungen zu veranschaulichen (z. B. mit Pfeilen Veränderungen verdeutlichen, mit Material Beziehungen veranschaulichen)?
- Beziehungen zwischen Aufgaben bzw. Rechenoperationen zu erklären?
- Zusammenhänge zwischen Aufgaben zum flexiblen Rechnen (7 + 6 ist 1 mehr als 6 + 6) einzusetzen?

## WEITERE ANREGUNGEN

- Eine Darstellung verändern und fragen „Was ändert sich, wenn…" (z. B. „Was ändert sich, wenn du eine Fünferreihe zum Punktebild von 2 · 5 hinzulegst?")

# 6 Stellenwertverständnis

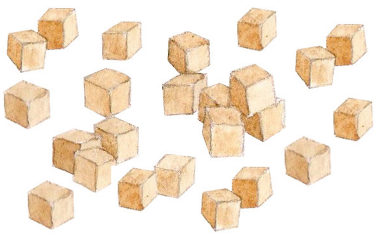
- Entwicklung des Stellenwertverständnisses *(pikas.dzlm.de/198)*
- Stellenwertverständnis *(primakom.dzlm.de/400)*
- Diagnose- und Fördermaterial *(mathe-sicher-koennen.dzlm.de/002)*, Module N1 und N2

**Beim Stellenwertverständnis geht es nicht nur um die Zahlen selbst, sondern auch um ihre Schreibfiguren (Krauthausen & Scherer, 2007, S. 17; Schipper, 2009, S. 119).**

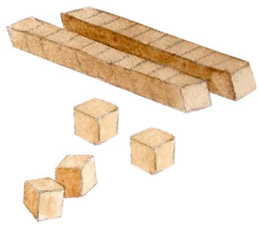
## 6.1 ELEMENTE DES STELLENWERTVERSTÄNDNISSES

In den ersten sechs Schuljahren sollen die Lernenden verstehen, wie Zahlen im Zehnersystem dargestellt werden. Das Zehnersystem zeichnet sich dadurch aus, dass es allein mit 10 Ziffern von 0 bis 9 möglich ist, Zahlen in beliebiger Größe und Genauigkeit darzustellen und mit ihnen zu operieren. Drei mathematische Ideen sind für das Verständnis des Stellenwertsystems von zentraler Bedeutung (Wartha & Schulz, 2014, S. 48ff.).

Das **Prinzip der fortgesetzten Bündelung** (und Entbündelung) besagt, dass Objekte (in der Grundschule: Einerwürfel, Zehnerstangen, Hunderterplatten etc.) immer zu 10er-Bündeln zusammengefasst werden, bis kein neues Bündel mehr voll wird.



**24 ungebündelt**



**24 gebündelt**

Außerdem werden Bündel ebenfalls wieder zu neuen Bündeln ‚höherer Ordnung' zusammengefasst. Das von der konkreten Anschauung abgelöste Prinzip ist auch für das Verständnis von Dezimalzahlen von zentraler Bedeutung.

Das **Prinzip des Stellenwerts** meint, dass die Position der Ziffer ihren Stellenwert bestimmt, indem die Bündelungseinheiten von rechts nach links ansteigen. Und unter dem **Prinzip des Zahlenwerts** wird verstanden, dass der Wert der Ziffer an einer bestimmten Position die Anzahl der entsprechenden Bündel des zugehörigen Stellenwerts angibt.

DAS PRINZIP DER FORTGESETZTEN BÜNDELUNG

| $10^3$ Tausender | $10^2$ Hunderter | $10^1$ Zehner | **$10^0$ Einer** | $10^{-1}$ Zehntel | $10^{-2}$ Hundertstel | $10^{-3}$ Tausendstel |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | H | Z | E | z | h | t |

...UND ENTBÜNDELUNG für die natürlichen Zahlen *(Grundschule)* und für die Dezimalzahlen *(Sek I)*

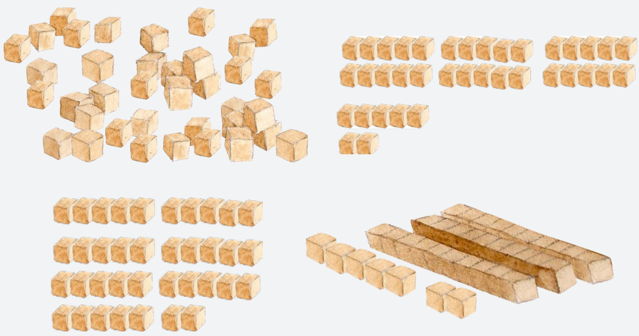
Zum Verständnis dieser Konventionen ist einerseits die Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen (Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Kap. 4) wichtig: 24 ist dasselbe wie 20 und 4 oder 2 Z(ehner) und 4 E(iner) oder 4 und 20 oder 4 E und 2 Z. Anderseits müssen die Lernenden flexibel zwischen verschiedenen Zahldarstellungen hin- und herübersetzen können. Auch das Lesen, Schreiben und Sprechen von Zahlwörtern kann Lernhürden bereithalten (z. B. elf statt zehn-eins oder eins-zehn; vier-und-dreißig und nicht dreißig-und-vier, aber siebenhundert-dreißig, nicht dreißig-siebenhundert; siebzig statt siebenzig; dreißig statt drei-zig etc.), die es gilt zu thematisieren.

# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Bietet mein Unterricht genügend Gelegenheiten, um am konkreten Anschauungsmaterial das Bündelungsprinzip (bündeln und entbündeln) handelnd zu erarbeiten (z. B. Ordnung einer unübersichtlichen Menge, Eintauschen von zehn Einerwürfeln in eine Zehnerstange und umgekehrt)?
- Nutze ich passende Darstellungen für Einer, Zehner oder Hunderter?
- Thematisiere ich die unregelmäßige Zahlwortbildung und veranschauliche ich die korrekten Sprechweisen materialgestützt?
- Wie ausführlich und mit welchen Aufgabenstellungen werden das Bündeln und Entbündeln im Schulbuch behandelt? Inwieweit wird darüber gemeinsam nachgedacht und gesprochen?

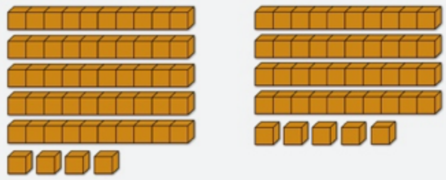
## UNTERRICHTSANREGUNG ‚AUF EINEN BLICK‘



Ausgehend von einer unstrukturiert dargestellten Anzahl an Holzwürfeln können die Lernenden eine vorteilhafte Anordnung für die Anzahlerfassung entdecken (s. o.): „Kannst du schnell sehen, wie viele Holzwürfel es sind?“ „Wie musst du die Holzwürfel legen, damit die Anzahl an Holzwürfeln einfacher bestimmt werden kann?“ Ebenfalls lässt sich das Tauschen (Bündeln) veranschaulichen *(primakom.dzlm.de/400).*

## WEITERE ANREGUNGEN


- Bildung der Zahlwörter verdeutlichen (inverse Zahlbildung thematisieren, Bestandteile des Zahlwortes hervorheben, Kap. 6.2) und die Sprech- und Schreibweise materialgestützt klären
- Zunächst verschiedene unstrukturierte Materialien (Streichhölzer, Bauklötze usw.) nutzen, um die Notwendigkeit der Zehnerbündelung zu verdeutlichen
- Strukturiertes Material nutzen, um den Zusammenhang zwischen niedrigerem Stellenwert (10 E) und höherem Stellenwert (1 Z) zu veranschaulichen



| Z | E |
|---|---|
| 5 | 4 |

| Z | E |
|---|---|
| 4 | 5 |

- Zahlen in der Stellenwerttafel darstellen (mit Plättchen oder mit Zahlsymbolen für die Anzahl der Bündel des jeweiligen Stellenwertes: 5 Z = 5 Zehnerbündel)
- Schreibweisen wie 15 E materialgestützt darstellen und anders bündeln: „Wie viele Z, E sind es?“
- Zahlen durch das konkrete (später auch durch das mentale) Hinzufügen oder Wegnehmen mit und ohne Zehnerüberschreitung verändern und Auswirkungen prüfen und begründen lassen: „Zu der Zahl 65 kommen 6 E hinzu. Welche Zahl ist es jetzt? Warum?“
- 100 strukturiert darstellen *(pikas-mi.dzlm.de/424)*

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage, …

- Mengen zu strukturieren, um die Anzahl der Elemente zu erfassen?
- Anzahlen unterschiedlich darzustellen (z. B. vorgegebene Zahlen mit Material legen, Hunderter – Zehner – Einer zeichnerisch darstellen, als additive Stellenwerte notieren)?
- Anzahlen gezielt durch das Hinzufügen bzw. Wegnehmen zu verändern?
- bei der Zehnerüberschreitung die Notwendigkeit des Bündelns (bzw. Entbündelns) zu erkennen und den Vorgang des Bündelns und Entbündelns zu erklären?

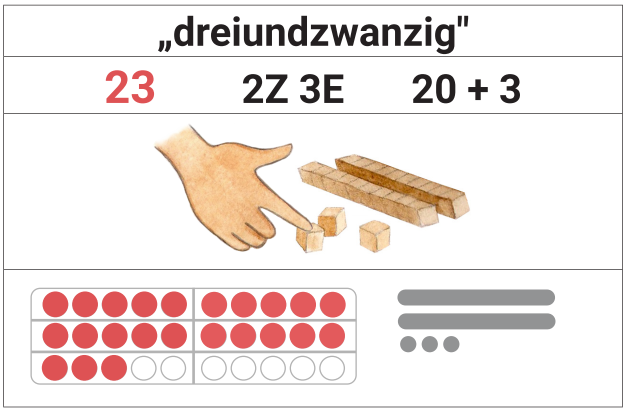
## 6.2 DARSTELLUNGEN VERNETZEN

Als weiteres zentrales Merkmal des Stellenwertverständnisses gilt die Fähigkeit, zwischen den verschiedenen Darstellungen flexibel wechseln zu können (Fromme, 2017). Dazu zählen bekanntlich Sprache, Mathesprache, Material und Bilder (Kap. 4.2).

**Sprache:** Im Gegensatz zur Notation von Zahlen, die regelgeleitet unter Benutzung des Stellenwertsystems und der arabischen Ziffern erfolgt, ist die Zahlwortbildung im deutschen Sprachraum von Unregelmäßigkeiten betroffen und unterscheidet sich z. T. erheblich von der Zahlwortbildung in anderen Ländern bzw. Sprachräumen. Bezogen auf zweistellige Zahlwörter ist das deutsche Zahlwortsystem beispielsweise durch Inkonsistenzen zwischen dem gesprochenen Zahlwort und der Abfolge der Ziffern in der geschriebenen Zahl (twenty-three – drei-und-zwanzig) gekennzeichnet.

**Mathesprache:** Unter Mathesprache wird die Verschriftlichung einer Zahl verstanden – die sogenannten Zahlzeichen. Am häufigsten Verwendung findet die sog. Normalform (23). Neben dieser ‚Normalform' einer Zahl lassen sich weitere Schreibweisen unterscheiden wie z. B. ‚2Z 3E' (Schreibweise mit Zehnern und Einern) oder 20 + 3.

**Material:** Zur Darstellung größerer Zahlen greift man in der Regel nicht mehr auf Alltagsmaterialien, sondern auf didaktische Materialien zurück, welche die Strukturen unseres Dezimalsystems berücksichtigen, wie Hunderterfeld, Rechenrahmen oder das sog. Dienes-Material (Würfel, Stangen, Platten).

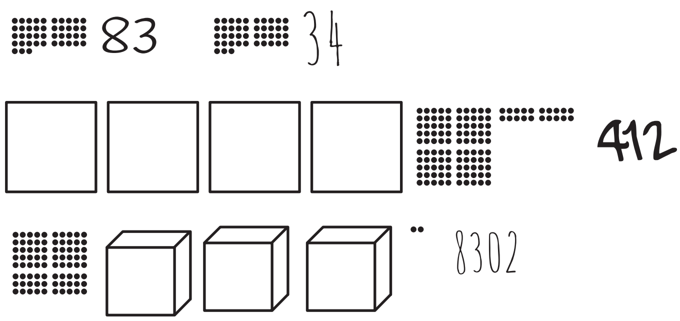



**Bilder:** Auch hier gilt, dass zur Veranschaulichung bildliche Darstellungen genommen werden, die die Fünfer- bzw. die Zehnerstruktur und später die Hunderter- und die Tausenderstruktur zum Ausdruck bringen wie zum Beispiel die Quadrat-, Strich-, Punktdarstellungen oder der Zahlenstrahl.

Mit dem Darstellungswechsel sind nun nicht nur Übersetzungen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen gemeint (wie z. B. die Umwandlung eines Zahlzeichens in ein Zahlwort), vielmehr können Übersetzungen auch innerhalb einer Zahlrepräsentation – d. h. beispielsweise von einer Zahldarstellung in eine andere – stattfinden (z. B. 32 = 30 + 2 = 3Z + 2E).

Die Entwicklung des Stellenwertverständnisses wird nicht allein durch die Anforderung, Material in Zahlzeichen oder Zahlzeichen in Zahlworte zu übersetzen, gefördert. Von ganz zentraler Bedeutung ist stets auch der Austausch über den Darstellungswechsel: Warum passt das? Was ist gleich, was ist verschieden? etc. (Kuhnke, 2012), weil es zum Ausbau von Verständnis durch Herausarbeiten von Merkmalen beiträgt.

Im Folgenden sehen Sie einige Lösungen von Schülerinnen und Schülern, denen eine bildliche Zahldarstellung vorgelegt wurde und die gebeten wurden, die repräsentierte Zahl symbolisch zu notieren. Weitere Beispiele und Lösungshinweise sind unter: *kira.dzlm.de/182* einsehbar.

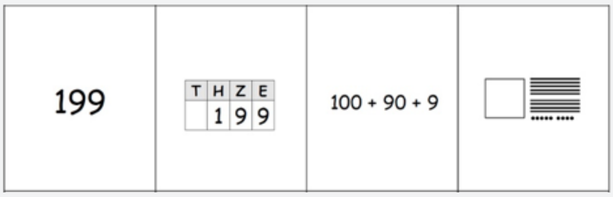


# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Bietet mein Unterricht den Lernenden hinreichend viele Möglichkeiten, verschiedene Zahldarstellungen (Zahlzeichen, Zahlwort, Schreibweise mit Stellenwerten, bildliche Darstellung, Darstellung mit Material) kennenzulernen?
- Werden Darstellungsformen kontinuierlich miteinander vernetzt sowie in andere Darstellungsformen übertragen?
- Bietet mein Unterricht ausreichend Gelegenheiten für den Austausch über Darstellungswechsel: „Warum passt die Darstellung (nicht)?“
- In welcher Form werden Darstellungswechsel in meinem Schulbuch angeregt?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚STELLENWERTE-QUARTETT‘

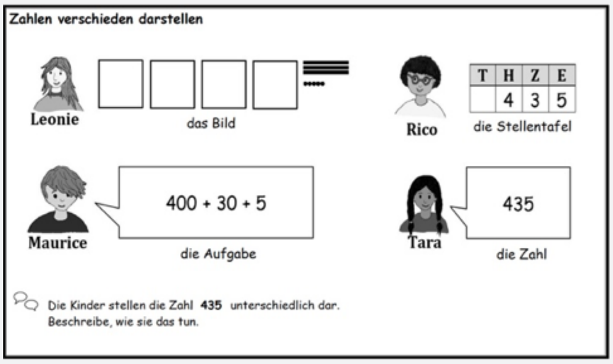



*mathe-sicher-koennen.dzlm.de/203*

Im Spiel ‚Stellenwerte-Quartett‘ wird der Zusammenhang verschiedener Darstellungsmöglichkeiten einer Zahl als Zahlsymbol, in der Stellenwerttafel, als additive Zerlegung sowie als bildliche Darstellung des Zehnersystemmaterials gefestigt. Es können vorgefertigte Quartettkarten benutzt oder eigene erstellt werden. Die Gestaltung eigener Quartettkarten bietet den Vorteil, dass sich die Lernenden zunächst aktiv mit verschiedenen Darstellungsformen auseinandersetzen und diese dann im anschließenden Spiel durch die Zuordnung vertiefen *(mathe-sicher-koennen.dzlm.de/002, Modul N1, ab dem 3. Schuljahr)*.

## WEITERE ANREGUNGEN

- Gesprächsanlässe unter der zentralen Frage: „Warum passt die Darstellung zur Zahl?“ (und umgekehrt) regelmäßig in den Unterricht integrieren (das abgebildete Material wäre für das 2. Schuljahr vom Zahlenraum her anzupassen)
- Darstellungen zuordnen (z. B. „Welche andere Darstellung passt zur Zahl?“) und beispielsweise Paare, Trios oder Quartette erstellen und finden lassen
- Eine Darstellung verändern und fragen: „Was ändert sich, wenn…?“ (z. B. „Was ändert sich, wenn du zur Zahl 65 drei Zehnerstangen oder 7 Einerwürfel dazulegst?“).
- Partnerarbeit: Ein Kind legt eine Zahl mit Zehnersystemmaterial, das andere Kind nennt das Zahlwort (und umgekehrt), ergänzend können Veränderungen an der Zahl vorgegeben werden: „Welche Zahl entsteht, wenn du 1, 2, 3, … Hunderter/Zehner/Einer hinzufügst oder wegnimmst?“
- Zahlen darstellen *(pikas-mi.dzlm.de/434; ab 3. Schuljahr)*
- Stellenwerte üben *(primakom.dzlm.de/404)*




*mathe-sicher-koennen.dzlm.de/node/509*

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

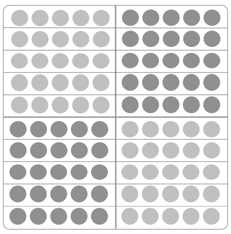
Inwiefern ist das Kind in der Lage, …

- eine Zahl in unterschiedlichen Darstellungsformen abzulesen?
- Zahlen in unterschiedliche Darstellungsformen zu übertragen?
- zwischen verschiedenen Darstellungsformen flexibel zu wechseln?
- ausgeführte Darstellungswechsel zu erklären: „Warum passt die Darstellung zur Zahl?“

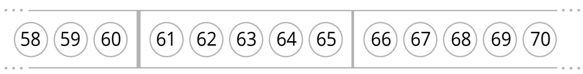
## 6.3 SCHNELLES SEHEN IM 100ER-RAUM

Auch im Kontext des Erwerbs des Stellenwertverständnisses und im Zuge der Orientierung im Hunderterraum ist die Fähigkeit zum schnellen Sehen – also zur quasi-simultanen Zahlerfassung – von besonderer Bedeutung, um die Entwicklung nicht zählender Rechenstrategien zu erleichtern. Diese Bedeutung wird dadurch verstärkt, dass die Anzahlerfassung auf den zweiten Blick auch in größeren Zahlenräumen als dem 20er-Raum die zentrale Voraussetzung dafür darstellt, dass die Schülerinnen und Schüler nicht zählende Rechenstrategien erwerben. In diesem Kontext ist zu beachten, dass es grundsätzlich drei Typen von Darstellungen gibt.

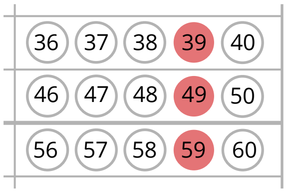
**Flächige Darstellungen**



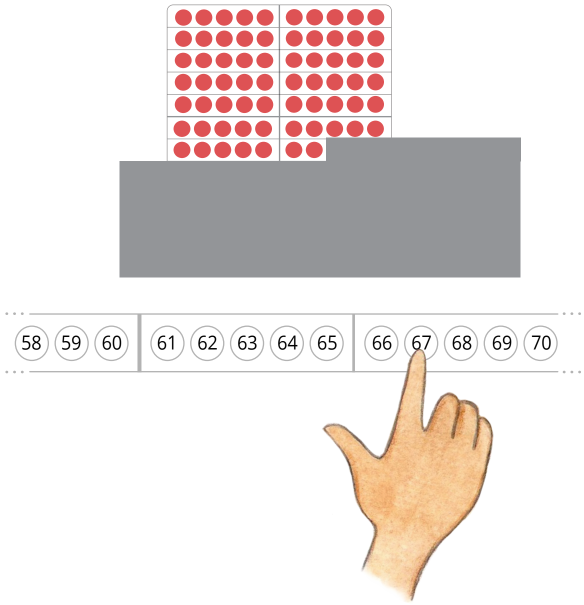
**Lineare Darstellungen**




**Darstellungen mathematischer Beziehungen**




Flächige oder lineare Darstellungen sowie Darstellungen mathematischer Beziehungen (z. B. „Die untere Nachbarzahl in der Hundertertafel ist um 10 größer.“) sind zum Aufbau des Stellenwertverständnisses und zur Orientierung in neuen Zahlenräumen oder nachfolgend zum Erwerb von Rechenoperationen außerordentlich wichtig. Später nutzt man dann verstärkt die Stellentafel.
Für sicheres Rechnen ist die sichere Zahlerfassung im Hunderterraum und im 3. Schuljahr entsprechend im Tausenderraum eine zentrale Voraussetzung. Die Lernenden müssen in der Lage sein, eine am Hunderterfeld oder an der Hunderterkette strukturiert dargebotene Zahldarstellung schnell in Zehner und Einer differenziert wahrnehmen zu können.



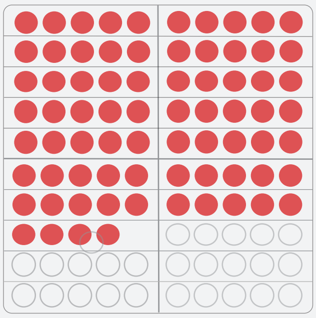

Dabei wird man einen Schwerpunkt auf die flächigen Darstellungen legen, da diese normalerweise im Unterschied zu den linearen Darstellungen eine klarere zusätzliche Strukturierung in 5er und 50er aufweisen und das schnelle Sehen für gewöhnlich an flächigen Darstellungen schneller und sicherer gelingt.
Die Hundertertafel oder später die Stellentafel ermöglichen zwar fundamentale Einsichten ins Stellenwertsystem, letztere insbesondere, wenn die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen auf die Dezimalzahlen erfolgt. Zur Steigerung der Fähigkeiten im schnellen Sehen sind sie jedoch wenig geeignet, weil sie keine anschauliche Bezugsbasis bieten. Das schnelle Sehen – beispielsweise am Hunderterrahmen – ist ein wichtiges, aber auch nicht unbedingt einfaches Übungsformat. Wenn die Lernenden solche Aufgaben unvorbereitet bearbeiten, liegt die Lösungshäufigkeit nicht selten bei 30 % oder gar darunter. Erfahrungen wie Untersuchungen zeigen aber auch auf, dass sich Lerneffekte bei den meisten Kindern schnell einstellen, insbesondere wenn nicht nur geübt, sondern immer auch darüber gesprochen wird, wie man die Anzahlen schnell erfassen kann (Schipper, Dröge & Ebeling, 2015, S. 57).

# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Erhalten die Lernenden ausreichend Gelegenheit, grundlegende Erfahrungen mit strukturierten Darstellungen zu sammeln (z. B. mit verschiedenen Anordnungen von Elementen zu arbeiten, Zahlen darzustellen, bewusst zu betrachten und zu beschreiben, nachzulegen und Anzahlen zu bestimmen)?
- Wird über Strukturen gesprochen und darüber, wie sie bei der Zahlerfassung helfen können? Gibt es im Unterricht Gelegenheiten, das schnelle Sehen verständnisbasiert zu trainieren?
- Fördere ich in meinem Unterricht das nachvollziehbare Beschreiben von Lösungswegen?
- Bietet mein Schulbuch genügend Übungen zur (quasi-)simultanen Zahlerfassung, nutze ich diese auch?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚SCHNELLES SEHEN AM HUNDERTERFELD‘

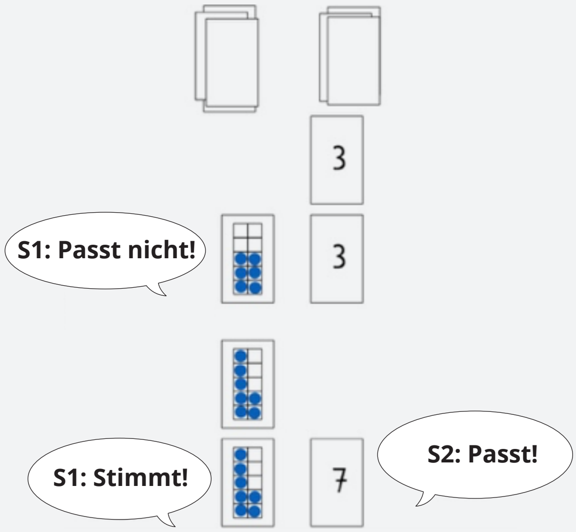


Anzahlen werden auf dem Hunderterfeld dargeboten und nach wenigen Sekunden wieder ausgeblendet. Impulsfragen sollten Übungen zum schnellen Sehen begleiten, um das Nachdenken und Sprechen über Strukturen anzuregen:

- Wie hast du das so schnell gesehen?
- Wer hat etwas anderes gesehen?
- Beschreibe noch einmal, wie Lisa das gesehen hat!
- Du kannst es nicht genau sagen? Gibt es ‚Ausschnitte‘, bei denen du dir sicher bist? Wie sahen die aus?
- Wie viele Punkte waren es höchstens? Mindestens?

## WEITERE ANREGUNGEN

- Gesprächsanlässe unter der zentralen Frage: „Warum passt die Darstellung zur Zahl?“ (und umgekehrt) regelmäßig in den Unterricht integrieren (das abgebildete Material wäre für das 2. Schuljahr vom Zahlenraum her anzupassen)
- Darstellungen zuordnen (z. B. „Welche andere Darstellung passt zur Zahl?“) und beispielsweise Paare, Trios oder Quartette erstellen und finden lassen




*pikas-mi.dzlm.de/423*

- Partnerarbeit: Ein Kind legt eine Zahl mit Zehnersystemmaterial, das andere Kind nennt das Zahlwort (und umgekehrt). Ergänzend können Veränderungen an der Zahl vorgegeben werden: „Welche Zahl entsteht, wenn du 1, 2, 3, … Hunderter/Zehner/Einer hinzufügst oder wegnimmst?“
- Zahlen darstellen *(pikas-mi.dzlm.de/434; ab 3. Schuljahr)*
- Stellenwerte üben *(primakom.dzlm.de/404)*

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage, …

- Anzahlen simultan bzw. bei größeren Anzahlen quasi-simultan zu erfassen?
- Strukturen zu erkennen und diese zu nutzen?
- zu beschreiben, wie die Anzahl geschickt erfasst wurde und nicht nur das Ergebnis zu nennen?

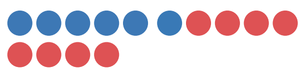
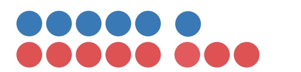
# 7 Nicht zählendes Rechnen: Einspluseins und Einsminuseins

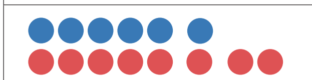
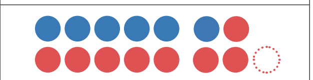
- Kopfrechnen *(primakom.dzlm.de/390)*
- 1+1 richtig üben *(pikas.dzlm.de/146)*
- Erarbeitung nicht zählender Rechenstrategien *(pikas.dzlm.de/255)*

Das kleine Einspluseins und – häufig vernachlässigt, aber kaum minder wichtig – das kleine Einsminuseins sind zentrale Unterrichtsinhalte des ersten Schuljahres. Spätestens am Ende der Schuleingangsphase sollen alle Kinder die Aufgaben des kleinen Einspluseins automatisiert wiedergeben und deren Umkehrungen sicher ableiten können. Das funktioniert besser, wenn sie vorab hinreichend Gelegenheit hatten, zu verstehen und zu vernetzen.

## 7.1 EINSPLUSEINS UND EINMINUSEINS VERSTEHEN

Grundvoraussetzung für die Entwicklung sicherer Rechenfertigkeiten ist deren Verständnis. Denn ein zu schneller Übergang zur Automatisierung führt in der Regel zu kurzfristigen und vordergründigen ‚Erfolgen' (Krauthausen & Scherer, 2007, S. 46). Das Arbeiten mit Material (Zwanzigerfeld, Rechenrahmen, Zwanzigerkette, ...) steht dabei im Vordergrund (Kap. 10). Die Kinder lernen durch die konsequente Nutzung der Anschauungsmaterialien Möglichkeiten kennen, wie sie die Aufgaben lösen können, ohne immer alles zu zählen. Die Aufgabe 6 + 8 beispielsweise kann mit Hilfe von Material – hier am Beispiel des Zwanzigerfeldes, aber natürlich auch mit Hilfe von linearen Darstellungen – ganz unterschiedlich gelöst werden.

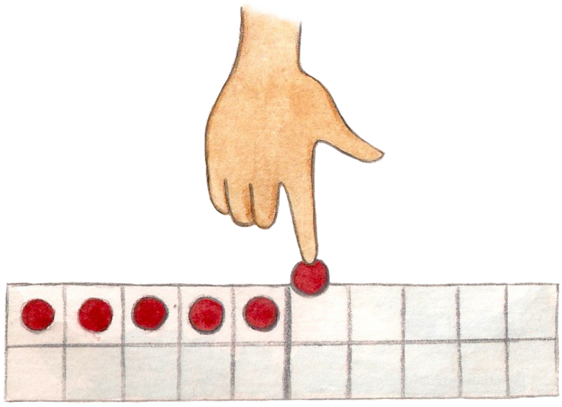
| Zerlegen eines Summanden | Zerlegen beider Summanden |
|---|---|
|  |  |
| (6 + 4) + 4 | (5 + 5) + (1 + 3) |

| Hilfsaufgabe nutzen | Gegensinnig verändern |
|---|---|
|  |  |
| 6 + 6, dann noch plus 2 | 7 + 7 |

Wichtig hierbei ist, dass die Kinder immer wieder über ihre Handlungen nachdenken und im Rahmen ihrer jeweils augenblicklichen Möglichkeiten ihr Tun versprachlichen. Zwei Missverständnisse gilt es in diesem Zusammenhang auszuräumen.

Es ist *erstens* nicht wichtiger, dass die Kinder verständig rechnen, als dass sie sicher rechnen. Ohne Rechensicherheit sind die Lernenden über ihre gesamte Schulzeit hinweg benachteiligt. Deswegen ist regelmäßiges Üben unverzichtbar (Kap. 11). Aber dieses ist effektiver, wenn es verständnisbasiert erfolgt.

*Zweitens* sollte man nicht von allen Kindern verlangen, dass sie jede Aufgabe auf vier verschiedenen Wegen lösen können. Aber keinem Schüler und keiner Schülerin sollten die Möglichkeiten vorenthalten werden, ihr Verständnis zu erweitern. Auswendige Verfügbarkeit des Einspluseins ist unverzichtbar, aber in der Mathematik ist Auswendiglernen ohne Verständnis in den weitaus meisten Fällen ineffektiv. Die Nutzung von Material ist insbesondere auch bei der Subtraktion von besonderer Bedeutung, auch weil sich die Subtraktion bildlich kaum eindeutig darstellen lässt. Denn man kann ein Bild, das die Subtraktion darstellen soll, in der Regel auch als Addition deuten.



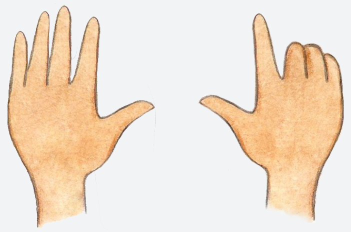
**5 + 1? oder 6 - 1?**

# Anregungen für den Unterricht

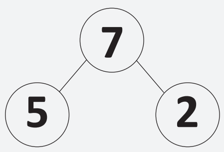
## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Setze ich geeignete Materialien ein, die nicht zählende Strategien ermöglichen?
- Fördere ich das Nachdenken über verschiedene Lösungsmöglichkeiten?
- Bekommen die Kinder Anregungen zur Versprachlichung verschiedener Vorgehensweisen?
- Zeige ich Beziehungen zwischen Additions- und Subtraktionsaufgaben auf?

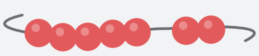
## UNTERRICHTSANREGUNG ‚ZAHLEN ALS ZUSAMMENSETZUNG AUS ZAHLEN'

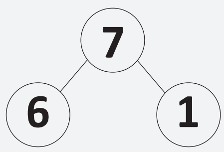


*Fingerbilder:* Mit Hilfe der Kraft der Fünf werden Fingerbild-Darstellungen thematisiert. Die Kinder werden aufgefordert, Zahlen als Fingerbild darzustellen, ohne jeden einzelnen Finger abzuzählen. Sie werden angeregt, über ihre Zahldarstellung zu sprechen, z. B. „Das sind 7 Finger. Ich zeige 5 Finger und 2 Finger."
*Aufgabenfamilien:* Anschließend erfolgt die Thematisierung verschiedener Zahlzusammensetzungen und Zahlzerlegungen, welche die Grundlage für den verständigen Aufbau von Addition und Subtraktion bildet. Aus der Zerlegung der Zahl 7 in 5 und 2 (7 = 5 + 2) lassen sich verschiedene Aufgaben erschließen. Material (20er-Kette, 20er-Feld, ...) unterstützt dabei das Erkennen von Zusammenhängen (vgl. S. 36). Somit wird im Beispiel von der einfachen, bereits automatisierten Aufgabe 7 = 5 + 2 die schwierigere Zerlegung 7 = 6 + 1 abgeleitet.



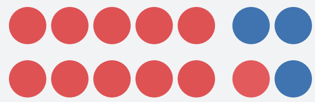

5 + 2 = ?
2 + 5 = ?
5 + ? = 7
2 + ? = 7
7 - 5 = ?
7 - 2 = ?






6 + 1 = ?
1 + 6 = ?
6 + ? = 7
1 + ? = 7
7 - 6 = ?
7 - 1 = ?

Das gegensinnige Verändern kann dabei z. B. an 20er-Ketten durch das Verschieben einer Kugel gut sichtbar gemacht werden (Gaidoschik, 2009, S. 86). Dabei sollte das Versprachlichen der Lösungswege und Handlungsweisen im Vordergrund stehen. So können die Kinder Strategien verstehen, präsentieren, vergleichen und bewerten, z. B. „Ich verschiebe von 5 + 2 eine Kugel nach links. Die 1. Zahl wird um 1 größer, die 2. Zahl wird um 1 kleiner. Aus 5 wird 6, aus 2 wird 1. Deswegen bleibt das Ergebnis gleich." Auch in der Plättchendarstellung wird das gegensinnige Verändern ersichtlich.



„Ich zerlege 7 und lege 5 rote und 2 blaue Plättchen. Ich wende ein blaues Plättchen. Aus 5 werden 6 rote Plättchen, aus 2 wird 1 blaues Plättchen. 5 wird um 1 größer, 2 wird um 1 kleiner. Das Ergebnis bleibt 7." Weitere Strategien zur Ableitung schwieriger von einfachen Aufgaben müssen gezielt trainiert werden *(Kap. 7.2 und pikas.dzlm.de/255).*

## WEITERE ANREGUNGEN

- Rechengeschichten zu Additions- und Subtraktionsaufgaben erfinden und besprechen
- Suche dir eine Zahl aus! Zeichne die Zahl so, dass man schnell erkennt, wie viele es sind!
- Beziehungen auf der 1+1- und 1–1-Tafel aufdecken, besprechen und begründen („Immer 2 mehr."; *pikas.dzlm.de/258)*
- Zahlen zerlegen *(pikas-mi.dzlm.de/224)*

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage, ...

- Zusammenhänge in Aufgabenfamilien zu nutzen?
- Ableitungsstrategien zu nutzen?
- passende Rechengeschichten zu Aufgaben zu erfinden?

## 7.2 EINSPLUSEINS UND EINMINUSEINS VERNETZEN

Die zählende Lösung von einfachen Additions- und Subtraktionsaufgaben ist zu Beginn der Grundschulzeit ein ganz normales und erwartbares Vorgehen. Viele Schülerinnen und Schüler können in der Regel zu diesem Zeitpunkt kaum andere Strategien zur Lösung solcher Aufgaben nutzen (Gaidoschik, 2010). Das verfestigte zählende Rechnen deutlich über den Anfang des 2. Schuljahres hinaus gilt jedoch als ein deutliches Anzeichen für besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen – und es ist auch ein Hauptgrund für besondere Probleme beim Rechnenlernen. Nicht wenige Kinder empfinden das zählende Rechnen – gerade im Zahlenraum bis 10 oder 20 – als eine für sie erfolgreiche Strategie, weil sie zu korrekten Resultaten kommen.

Aber zählendes Rechnen weist eine Reihe von Nachteilen auf: Es ist *zeitaufwändig* insbesondere in größeren Zahlenräumen, *konzentrationsaufwändig*, weil sowohl die Aufgabe als auch die Zählprozesse gleichzeitig im Kurzzeitgedächtnis behalten werden müssen, sowie *fehleranfällig* aufgrund hoher Merkleistung oder durch sog. Plus- oder Minus-1-Fehler (8 + 4 wird z. B. zählend gelöst, wobei der Zählvorgang bei 8 beginnt: 8, 9, 10, 11).

Ein zentrales Ziel besteht somit darin, dass die Lernenden lernen, wie sie sich Ergebnisse von Aufgaben aus anderen beherrschten Aufgaben ableiten können. Wie in der folgenden Abbildung veranschaulicht, kann das Ergebnis der Aufgabe 9 + 2 beispielsweise abgeleitet werden aus den Aufgaben 8 + 2, 9 + 1 oder 10 + 2.

Bekannten weitere Ergebnisse herzuleiten. Das Nutzen solcher Hilfsaufgaben ist nicht nur aus arbeitsökonomischen Gründen sinnvoll. So zeigen Forschungsresultate zur Überwindung des zählenden Rechnens, dass es gerade für mathematikschwächere Kinder eine unverzichtbare Hilfe darstellt, wenn die Lernenden bei der Ableitung von schwierigeren aus leichteren Aufgaben unterstützt werden (Gaidoschik, 2007; Häsel-Weide et al., 2014).

Daneben existieren noch weitere Strategien, die nicht nur im Rahmen des kleinen Einspluseins, sondern auch darüber hinaus von Bedeutung sind wie etwa die Zehnerstopp-Strategie (7 + 6 wird gelöst durch 7 + 3; + 3). Alle diese Strategien entfalten ihre Kraft über das Einspluseins hinaus, denn sie sind auch für das Rechnenlernen in größeren Zahlräumen hilfreich.

Am Ende des Lernprozesses sollen die Lernenden alle Aufgaben des Einspluseins beherrschen und die Aufgaben des Einsminuseins sicher ableiten können. Hierzu sind dann Übungen zur Automatisierung und zur Wiederholung der einzelnen Aufgaben, die auf einer sicheren Verständnis- und Vernetzungsgrundlage basieren, von nicht zu unterschätzender Bedeutung. Aber bevor diese wirksam werden können, müssen Übungen zur Automatisierung der Ableitungsstrategien erfolgen. Das ist umso wichtiger, als dass Kinder mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen häufig schwache Merkleistungen haben und das unvernetzte, nicht verständnisbasierte Automatisieren für sie sehr aufwändig ist.

**8 + 2 sind 10.**
**Noch einen mehr, weil die Aufgabe ist ja mit 9...**
**sind 11.**

**9 + 1 sind 10.**
**Dann noch einen mehr,**
**sind 11.**

**10 + 2 sind 12.**
**Dann minus 1 sind 11.**

Bei diesen Nachbaraufgaben-Strategien wird einer der beiden Summanden um 1 verändert.

Bei anderen Aufgaben könnte es hilfreich sein, beide Summanden um 1 zu verändern (aus 6 + 7 wird z. B. 5 + 6). Eine weitere Strategie verändert einen Summanden um 1 und den anderen gegensinnig ebenfalls um 1, so dass das Resultat gleichbleibt (aus 9 + 4 wird 10 + 3; Konstanz der Summe). Nachbaraufgaben, Doppel-Nachbaraufgaben und Ausgleichsaufgaben kann man unter dem Oberbegriff der *Hilfsaufgaben* zusammenfassen: Aufgaben, die helfen, aus bereits

**Nicht Einzelaufgaben automatisieren, sondern Ableitungsstrategien.**
**(Michael Gaidoschik)**

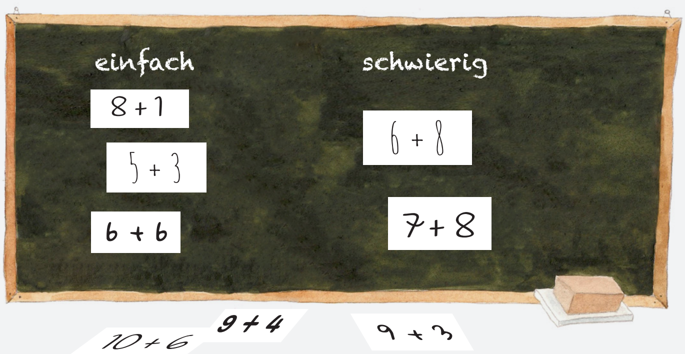
# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Benenne ich mit den Kindern gezielte Ableitungsstrategien?
- Wie thematisiere ich in meinem Unterricht den gezielten Einsatz von Ableitungsstrategien?
- Wie leite ich gemeinsam mit den Kindern schwere Aufgaben von einfacheren ab?
- Begründe ich mit den Kindern die Auswahl geeigneter Rechenwege?
- Wie bringe ich die Kinder über ihre Strategien ins Gespräch?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚1+1 UND 1-1-KARTEI'

Die Aufgabenkärtchen können den thematisierten Ableitungsstrategien (vgl. S. 38) zugeordnet werden. Hierbei kann darüber diskutiert werden, welche Strategie sich eher eignet. Auch können die Karten zu verschiedenen Strategien *(pikas.dzlm.de/255)* gelegt werden.
An der Tafel werden die Karten vermischt in die Mitte gehängt. Nun können sie in einem ersten Schritt gemeinsam mit den Kindern bzgl. der Kriterien ‚einfach' und ‚schwierig' sortiert werden. Die Kinder begründen dabei ihre Entscheidung, z. B. „6 + 6 ist einfach. Das ist eine Verdopplungsaufgabe." oder „5 + 3 ist einfach. Das ist eine Aufgabe mit 5."




Anschließend wird gemeinsam versucht, die schwierigen Aufgaben von einfachen abzuleiten:

7 + 8

Ich rechne mit der Verdopplungsaufgabe: 7 + 7 + 1

Ich rechne mit dem Zehnerstopp: 7 + 3 + 5

Ich rechne auch mit der Verdopplungsaufgabe: 8 + 8 – 1

Die Karteikarten der 1+1-Kartei *(pikas.dzlm.de/146)* bzw. der 1–1-Kartei *(pikas.dzlm.de/251)* können farblich passend zu den im Lehrwerk eingesetzten Tafeln oder Strategien kopiert werden. In Einzelarbeit können die Kinder die Kärtchen sortieren. In Partnerarbeit und im Plenum tauschen sich die Kinder über Ableitungsstrategien aus. Durch regelmäßiges Training können so auch die ‚schwierigen' Aufgaben automatisiert werden.

## WEITERE ANREGUNGEN

- Einsatz des Blitzrechnen-Materials *(pikas.dzlm.de/155)*
- Üben mit dem Vierphasenmodell *(pikas.dzlm.de/420)*
- Hinreichend viele beziehungsreiche Übungen einsetzen, auch zur Subtraktion *(pikas.dzlm.de/354)*
- Aufgaben wie Entdeckerpäckchen *(pikas.dzlm.de/edp)* oder Zahlenhäuser zur Förderung des strategischen Vorgehens *(pikas-mi.dzlm.de/224)*

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage …

- Ableitungsstrategien zur Berechnung schwieriger Aufgaben zu nutzen?
- die benutzten Strategien zu benennen?
- mit geeignetem Material Beziehungen zwischen Aufgaben zu zeigen?

# 8 Nicht zählendes Rechnen: Addition und Subtraktion

- Ablösung vom zählenden Rechnen *(primakom.dzlm.de/460)*
- Erarbeitung nicht zählender Rechenstrategien *(pikas.dzlm.de/255)*
- Diagnose- und Fördermaterial *(mathe-sicher-koennen.dzlm.de/002)*, Module N5 und N6

Im 2. Schuljahr bildet das additive Rechnen im Hunderterraum einen zentralen Lerninhalt. Auch hier gilt: Die Lernenden sollen sicher rechnen können. Und die beste Voraussetzung dafür ist, dass diese Sicherheit auf einer tragfähigen Verstehens- und Vernetzungsgrundlage erworben wird.

## 8.1 ADDITION UND SUBTRAKTION IM 100ER-RAUM VERSTEHEN

Wie rechnen Sie eigentlich 38 + 13? Lernende verwenden hier ganz unterschiedliche Vorgehensweisen.

| **Stellenweise:** | **Schrittweise:** | **Hilfsaufgabe:** |
|---|---|---|
| 30 + 10 = 40 | 38 + 10 = 48 | 40 + 13 = 53 |
| 8 + 3 = 11 | 48 + 3 = 51 | 53 – 2 = 51 |
| 40 + 11 = 51 | | |

Soweit – so gut. Aber es gibt Kinder, die solche Aufgaben nicht rechnend lösen. Die Verfestigung des zählenden Rechnens über den Anfang des 2. Schuljahres hinaus stellt bekanntlich eines der Hauptmerkmale von Schülerinnen und Schülern dar, die Schwierigkeiten im Mathematikunterricht haben.

- **Lea:**
„38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50"
(Beginn bei 38 statt 39)
- **Tim:**
„39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52"
(Auslassen von ‚Schnapszahlen')
- **Suat:**
„39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 90, 91, 92"
(Instabilität der Zahlwortreihe)
- **Paula:**
„39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46"
(Abbrechen der Zahlwortreihe, eine Handvoll ausgelassen)

Das zählende Rechnen erschwert das Erkennen von Zahlstrukturen, also von Zusammenhängen zwischen Aufgaben. Es verbaut den Kindern den Zugang zu dem, was das Mathematische am Rechnen ist. So hat Gaidoschik (2010) gezeigt, dass Lernende, die Mitte des 1. Schuljahres Zusammenhänge zur Ermittlung der Ergebnisse von Rechenaufgaben nutzten, in 70 % aller Fälle am Ende des Schuljahres Aufgaben durch Faktenabruf lösten; bei den zählenden Rechnern waren es lediglich 34 %. Durch diese aufwändigen Prozesse des einzelnen Abzählens sind die Lernenden nur schwer in der Lage, Zusammenhänge zu sehen und ein ‚Gefühl' für Zahlen und Operationen zu entwickeln, weil der Zählprozess an sich die volle Konzentration beansprucht.

Beim Ausnutzen von Zusammenhängen entfalten die Rechengesetze ihre volle Kraft (vgl. S. 28), und es wird deutlich, dass diese über Einspluseins & Co. hinaus den gesamten Rechenunterricht durchziehen.

Ein Missverständnis soll an dieser Stelle ausgeräumt werden. Es ist nicht das Ziel des Unterrichts, dass jedes Kind jede Aufgabe gemäß aller Hauptstrategien berechnen können soll.

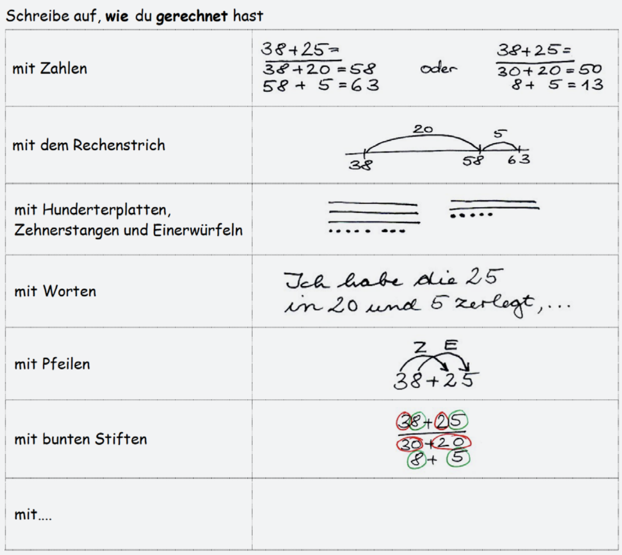
Dieser Anspruch würde viele Kinder überfordern, insbesondere die mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. Das bedeutet aber nicht, dass die Vermittlung einer einzigen Vorgehensweise angestrebt wird. Die Lernenden sollten unterschiedliche Wege angeboten bekommen und dann ihren Weg wählen, um die Aufgabe richtig lösen zu können. Für manche Kinder bedeutet das, dass sie im Endeffekt jede Aufgabe mit ‚ihrer' verständnisbasiert erworbenen Strategie angehen.

# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Werden die Lernenden durch geeignete Aufgaben und Reflexionsanlässe dazu angeregt, die Ablösung vom zählenden Rechnen zu vollziehen?
- Werden die Lernenden angeregt, Zahl- und Aufgabenbeziehungen zu erkennen, zu versprachlichen und zu nutzen?
- Reserviere ich für jede behandelte Strategie genügend Zeit, damit die Lernenden deren Merkmale – auch im Vergleich – verstehen können?
- Bietet das Schulbuch genügend Gelegenheiten, die verschiedenen Strategien (z. B. mit Hilfe von Punktefeldern oder dem Rechenstrich) anschauungsgestützt zu erarbeiten?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚RECHENWEGE DARSTELLEN'



Schreibe auf, **wie** du **gerechnet** hast

| | |
|---|---|
| mit Zahlen | 38+25= 38+20=58 58+5=63 oder 38+25= 30+20=50 8+5=13 |
| mit dem Rechenstrich | 20 5 38 58 63 |
| mit Hunderterplatten, Zehnerstangen und Einerwürfeln | |
| mit Worten | Ich habe die 25 in 20 und 5 zerlegt,... |
| mit Pfeilen | Z E 38+25 |
| mit bunten Stiften | 38+25 30+20 8+5 |
| mit.... | |

Im Anschluss an eine Einführungsphase im Plenum, in der exemplarisch zwei oder drei Aufgaben gemeinsam gelöst werden, bearbeiten die Lernenden weitere zwei Aufgaben, bei denen sie gebeten werden, über ihren Rechenweg nachzudenken und ihn mündlich oder schriftlich zu erläutern. Insbesondere bei letzterem brauchen sie Unterstützung durch sog. Forschermittel *(pikas.dzlm.de/227 und 361)* und durch sprachliche Hilfen *(pikas.dzlm.de/194)*. Dabei ist aber stets zu bedenken, dass sowohl Forschermittel als auch sprachliche Mittel sich nicht automatisch als Lernhilfen erweisen, sondern in einem behutsamen Prozess dosiert eingeführt werden sollten.

## WEITERE ANREGUNGEN

- Aufgaben nach Schwierigkeit sortieren lassen (einfache und schwierige Aufgaben) und darüber sprechen, welche Merkmale Aufgaben einfach oder schwierig machen
- Operative Serien nutzen, um Aufgabenbeziehungen unter Ausnutzen von Rechengesetzen anschauungsgestützt zu erkennen, zu nutzen und zu besprechen (27 + 5 = , 37 + 5= , 47 + 5 = etc.)
- Jeweils eine leichtere und eine schwierigere Aufgabe vorgeben und die Lernenden entscheiden lassen, welche sie als erste rechnen und wie ihnen diese bei der jeweils anderen Aufgabe hilft (z. B. 37 + 10 und 37 + 15) – und darüber sprechen
- Aufgabenlösungen an Material oder bildlichen Darstellungen nachvollziehen oder selbst darstellen lassen
- Rechenstrategien gemeinsam erarbeiten (nicht mehr als eine pro Unterrichtsstunde) und ihnen einen gemeinsam vereinbarten Namen geben
- Gemeinsam das benötigte Sprachmaterial (Einer, Zehner, plus, zerlegen, etc.) erarbeiten und in einem Sprachspeicher festhalten
- Verbale und symbolische Beschreibungen von Rechenwegen einander zuordnen und die Zuordnungen begründen

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage ...

- die benötigten Vorkenntnisse zu aktivieren (Einspluseins und Einsminuseins, Plus- und Minusaufgaben lösen, bei denen eine Zahl eine Zehner- oder eine Einerzahl ist)?
- die Aufgaben sauber zu notieren, um den Überblick zu behalten?
- die verschiedenen Teilergebnisse so zu verknüpfen, dass das Endergebnis erhalten wird?
- die jeweilige Strategie mit Hilfe von Material oder Zeichnungen anschauungsgestützt darzustellen?

## 8.2 ADDITION UND SUBTRAKTION IM 100ER-RAUM VERNETZEN

Wie die Forschungsergebnisse von Gaidoschik, Fellmann & Guggenbichler (2016) aufzeigen, kann ein Unterricht, der den Erwerb von Ableitungsstrategien kontinuierlich zum Gegenstand der Reflexion und regelmäßiger Übung macht, die Zahl der Schülerinnen und Schüler, die am Ende des ersten Schuljahres zählend rechnen, deutlich reduzieren. Die Vermutung liegt nahe, dass dieses auch beim additiven Rechnen im 100er-Raum zutrifft.

Voraussetzung zur Entwicklung nicht zählender Rechenstrategien, also zur Ablösung vom zählenden Rechnen (was ja eigentlich kein Rechnen, sondern eher ein Zählen ist), ist das Vorhandensein von Vorkenntnissen, im Einzelnen …

1.) auswendig gewusste Aufgaben,
2.) Kennen und Nutzen von Rechengesetzen,
3.) tragfähiges Operationsverständnis,
4.) tragfähiges Stellenwertverständnis (im größeren Zahlenraum) und
5.) Zahlen- bzw. Aufgabenblick.

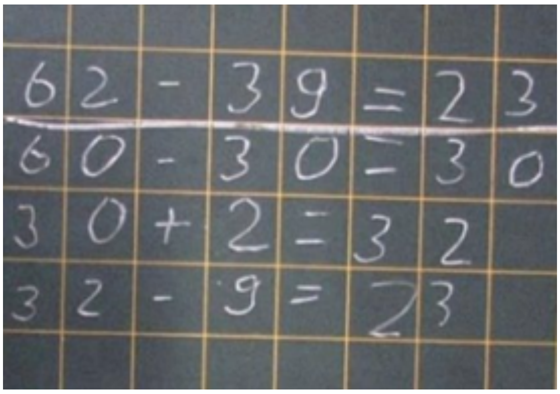
Unter letzterem versteht man die Fähigkeit, zu entscheiden, ob sich eine bestimmte Rechenstrategie für eine bestimmte Aufgabe mit bestimmten Zahlenwerten eignet. Erst eine Zahl wie 100 zu addieren und dann wieder etwas zu subtrahieren, ist eine gute Strategie, wenn z. B. 98 zu addieren ist, aber nicht, wenn plus 73 zu rechnen ist. Erst wenn diese Vorkenntnisse genutzt werden können, ist eine Ablösung vom zählenden Rechnen möglich. Ein bloßes, verständnisarmes und daher nicht sinnvolles Auswendiglernen – wie beim Einmaleins denkbar – funktioniert beim Rechnen im 100er-Raum (und darüber hinaus) nicht, weil es viel zu viele Aufgaben gibt.

Zum flexiblen Einsatz nicht zählender Strategien sollten diese zunächst mit den Kindern thematisiert und mit Begriffen benannt werden. Zusätzlich ist es aber auch sinnvoll, die Kriterien für die Auswahl einer geeigneten Strategie zu erarbeiten. So können die Aufgaben nach ihrer Eignung für bestimmte Strategien sortiert werden, wobei es nicht auf das Ausrechnen ankommt, sondern ‚nur' auf die Aufgabenmerkmale, die den Kindern dadurch bewusst werden können.

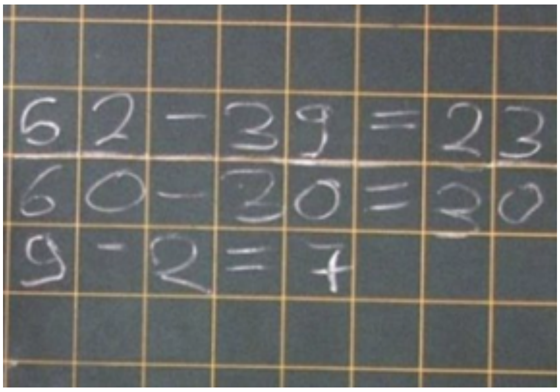
Auch beim Üben bietet es sich an, Aufgabengruppen zu thematisieren, die vergleichbare Merkmale aufweisen, also beispielsweise Aufgaben, bei denen die Nutzung der Nachbaraufgabe eine aus der Sicht geübter Rechner geeignete Strategie darstellt.

Die Webseite KIRA (Kinder rechnen anders) bietet durch Videos oder schriftliche Schülerdokumente zahlreiche Informationen und Denkanstöße, die dazu beitragen können, dass Erwachsene zunehmend besser verstehen, wie Kinder rechnen (Kap. 2.1). Im KIRA-Quiz *(kira.dzlm.de/103)* können Sie außerdem feststellen, wie gut sie darin sind, das Denken der Kinder zu verstehen.

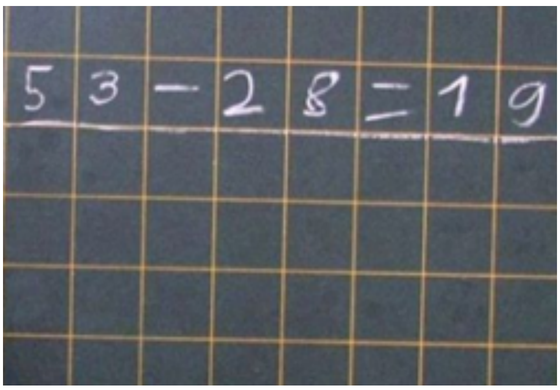
**Einsteiger**




**Fortgeschrittene**




**Profis**




*kira.dzlm.de/103*

Weitere Videos und Schülerdokumente zu 61 verschiedenen Themen finden Sie unter *kira.dzlm.de*.

# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Haben die Lernenden ausreichend Gelegenheiten, verstehensbasierte Strategien auszuprobieren und zu sichern?
- Werden die verschiedenen Darstellungen von Aufgaben (Bild, Handlung, symbolische Darstellung, Rechengeschichten) ausreichend miteinander vernetzt mit dem Ziel, dass die Lernenden sich im Sinne des Vierphasenmodells (Kap. 10) zunehmend von konkreten Darstellungen lösen, ohne den Bezug zu diesen zu verlieren?
- Werden in meinem Unterricht die Strategien kontinuierlich zum Gegenstand der Reflexion gemacht? Reserviere ich für jede behandelte Strategie genügend Zeit, damit die Lernenden einsehen können, dass sich nicht jede Strategie für jede Aufgabe gleich gut eignet?
- Bietet das Schulbuch genügend Aufgaben zur Schulung der Geläufigkeit sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚ÜBER RECHENWEGE SPRECHEN'


Der Austausch mit der Lehrperson und insbesondere auch mit Mitschülerinnen und Mitschülern ist zur Weiterentwicklung der eigenen Rechenwege von zentraler Bedeutung. Als Rechen- oder Mathekonferenz bezeichnet man in diesem Sinn einen Zusammenschluss von Kindern in heterogenen Kleingruppen zur Präsentation und Reflexion von individuellen Lösungswegen im Mathematikunterricht (Selter, 2017, S. 79; *pikas.dzlm.de/265 und 457 und 470).*

## WEITERE ANREGUNGEN

- Zunehmende Lösung von der konkreten Anschauung durch Orientierung am Vierphasenmodell (Kap. 10)
- Aufgaben mit vorgegebenen Resultaten erfinden lassen und diese Aufgaben miteinander vergleichen („Was ist gleich, was ist verschieden?")
- Die Lernenden vorgegebene Aufgaben danach sortieren lassen, inwieweit sie sich für eine oder mehrere Strategien eignen
- Bildlichen oder materialgestützten Darstellungen zugehörige Rechenwege zuordnen und die Zuordnung begründen lassen
- Die Lernenden drei Aufgaben erfinden lassen, die sich für eine bestimmte Strategie gut eignen, und dies begründen lassen
- Die Lernenden drei Aufgaben erfinden lassen, die sich für eine bestimmte Strategie nicht gut eignen, und dies begründen lassen
- Darüber sprechen, was eine gute Beschreibung eines Rechenweges ausmacht, so dass andere diesen auch nachvollziehen können
- Hinreichend viele beziehungsreiche Übungen zur Erlangung von Rechensicherheit wie Entdeckerpäckchen, Rechenketten oder Zahlenketten einsetzen

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage …

- bildliche Darstellungen, Materialdarstellungen, symbolische Darstellungen und Rechengeschichten einander zuzuordnen?
- sich für eine Strategie zu entscheiden (auch wenn es bei einzelnen Kindern häufig dieselbe sein sollte mit der Begründung, dass sie sich hier am sichersten fühlen)?
- den Strategien einen gemeinsam vereinbarten Namen zuzuordnen, der die Besonderheit der jeweiligen Strategie zum Ausdruck bringt (z. B. schrittweise)?
- auch mit schwierigen Aufgabenanforderungen bei der Subtraktion (z. B. Einer im Subtrahenden größer als im Minuenden) angemessen umzugehen?

# 9 Nicht zählendes Rechnen: Einmaleins und Einsdurcheins

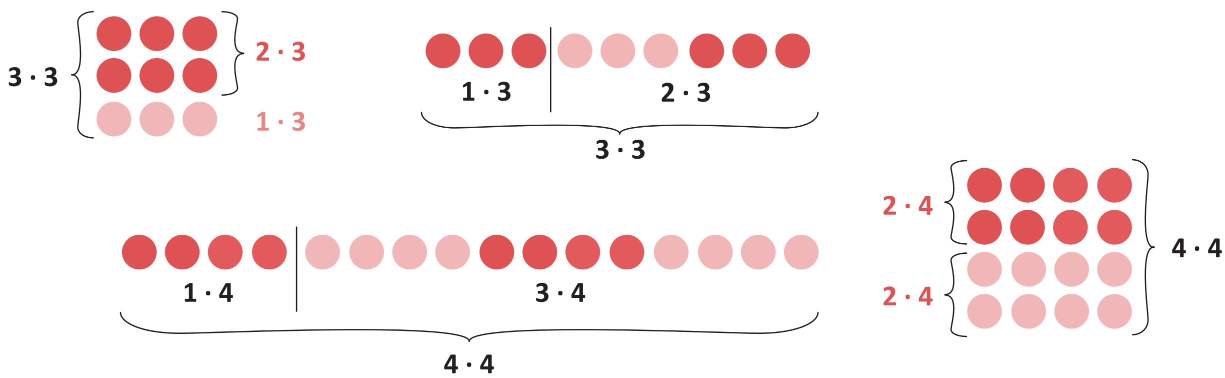
- 1·1 richtig üben *(pikas.dzlm.de/033)*
- Schülerlösungen zur Multiplikation und Division *(kira.dzlm.de/151)*
- Einmaleinslernen auf eigenen Wegen *(pikas.dzlm.de/458)*

Das kleine Einmaleins und das kleine Einsdurcheins sind ebenfalls zentrale Unterrichtsinhalte des 2. Schuljahres. Mitte der Jahrgangsstufe 3 sollen dann alle Kinder die Aufgaben des kleinen Einmaleins automatisiert wiedergeben und deren Umkehrungen sicher ableiten können. Was auf S. 36 bereits gesagt wurde, gilt auch hier: Das funktioniert besser, wenn die Lernenden vorab hinreichend Gelegenheit hatten, zu verstehen und zu vernetzen.

## 9.1 EINMALEINS UND EINSDURCHEINS VERSTEHEN

Ein tragfähiges Operationsverständnis stellt eine unverzichtbare Voraussetzung dafür dar, dass die Lernenden verstehen können, welche Beziehungen zwischen den einzelnen Aufgaben bestehen und wie diese für weiterführende Lernprozesse genutzt werden können (Gaidoschik, 2014). Das erscheint umso dringlicher, als dass die im Rahmen des sog. kleinen Einmaleins (weiter)entwickelten Fähigkeiten der Lernenden, verständig Vernetzungen zu nutzen, auch für das Erlernen der Multiplikation und der Division größerer Zahlen wichtig sind. Mehr als das: Sie sind ganz generell für das Erlernen von Mathematik von außerordentlicher Bedeutung – nicht nur für das Gelingen von weiterführenden Lernprozessen, sondern auch für die Einstellung der Lernenden zur und ihr Bild von Mathematik.
Die unterrichtliche Behandlung des Einmalseins (und nachfolgend des Einsdurcheins) orientiert sich – wie auch die des Einspluseins und des Einsminuseins – am didaktischen Prinzip ‚vom Leichten zum Schwierigen'. Allerdings wird hier nicht zwischen leichten und schwierigen Einmaleinsreihen unterschieden, sondern zwischen leichteren Aufgaben, die die Lernenden sich vergleichsweise schnell merken können, und schwierigeren Aufgaben. Erstere werden seit Jahrzehnten als Kern- oder Königsaufgaben bezeichnet (1mal, 2mal, 10mal und 5mal). Die anderen Aufgaben können daraus mehr oder weniger schnell abgeleitet werden.

Das Einmaleins beziehungsreich zu lernen, ist effektiver und nachhaltiger als alle 100 Aufgaben auswendig zu lernen (Gaidoschik, 2014). Und die Lernenden vertiefen und erwerben Strategien, die für den weiterführenden Unterricht in der Sekundarstufe hilfreich sind. Um Strategien zu verstehen, braucht es hinreichend viele Beispiele. Hierzu geht ein verständnisorientierter Unterricht nicht davon aus, Reihe für Reihe auswendig lernen zu lassen, sondern betont die Zusammenhänge und arbeitet heraus, wie diese für das Einmaleinslernen genutzt werden können (Gaidoschik, 2014).
In späteren Phasen des Lernprozesses kann es durchaus Sinn machen, die Aufgaben der einzelnen Reihen (also alle mit gemeinsamem zweiten Faktor) gezielt zu behandeln, um deren mathematische Zusammenhänge zu nutzen.
Wichtig ist in diesem Kontext nur, dass die Multiplikation nicht nur als Verkürzung der wiederholten Addition verstanden werden sollte. Das wäre so, als würde die Addition nur als Verkürzung des Zählens angesehen. Multiplikation ist das Operieren mit gleichgroßen Gruppen (3 Vierer). Daher sollte gerade in Einführungsphasen diese Gruppensprache betont werden, damit die Lernenden mit 3 · 4 nicht nur eine Wortfolge verbinden, sondern ein anschauungsgestütztes Verständnis aufbauen können.

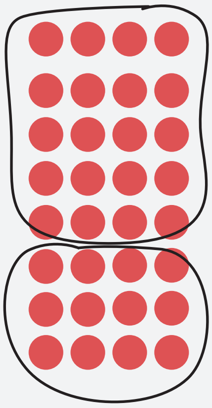


# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Haben die Lernenden ausreichend Gelegenheit, die Kernaufgaben zu automatisieren?
- Bietet mein Unterricht die Möglichkeit, weitere Einmaleinsaufgaben mit den Kernaufgaben in Beziehung zu setzen und Zusammenhänge zu erschließen?
- Bietet mein Klassenraum visuelle Darstellungen der Aufgabenbeziehungen wie z. B. Einmaleinstafel oder Einmaleinsplan?
- Welche Anregungen bietet mein Schulbuch zu den Kernaufgaben und den Aufgabenbeziehungen?
- Welche Anregungen bietet mein Klassenraum bzw. mein Schulbuch im Hinblick auf Sachsituationen zum Aufteilen und Verteilen?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚AUFGABE UND HILFSAUFGABE‘



Die Lernenden stellen verschiedene Einmaleinsaufgaben mit Punktefeldern dar und zerlegen sie in bekannte Kernaufgaben (z. B. 8 · 4 = 5 · 4 + 3 · 4). Wichtig ist hier das Gespräch: „Welche Aufgabe ist es ursprünglich? Wie wird sie zerlegt? Warum ist es schlau, so zu zerlegen? Wie hätte man die Aufgabe noch zerlegen können? Welche Zerlegung ist für dich die einfachste?“
Wichtig hierbei ist, auch die Zerlegungen mit Hilfe der Subtraktion anzusprechen, so ist 8 · 4 z. B. auch 10 · 4 – 2 · 4.
Dasselbe kann auch auf symbolischer Ebene geschehen: Die Lernenden leiten Einmaleinsaufgaben von den Kernaufgaben und den Quadratzahlaufgaben ab und begründen ihre Ableitungen *(pikas.dzlm.de/033)*. Dabei nutzen sie im Wesentlichen die Nachbaraufgaben (z. B. 5 · 8 bei 6 · 8 oder 8 · 8 bei 9 · 8) sowie das Verdoppeln und Halbieren (z. B. 2 · 8 bei 4 · 8).

## WEITERE ANREGUNGEN

- Kernaufgaben einer Reihe (1mal und 2mal sowie 5mal und 10mal) linear oder in einem Punktefeld darstellen und miteinander vergleichen; Quadratzahlen durch quadratische Punktefelder darstellen
- Aufgabe und Tauschaufgabe (z. B. 3 Fünfer und 5 Dreier) mit Hilfe von Punktefeldern untersuchen („Was ist gleich, was ist verschieden?“)
- Veränderungen untersuchen: Zu einem 4 · 3-Punktefeld wird eine weitere Reihe mit drei Punkten oder Plättchen gezeichnet oder gelegt („Wie lautet die Aufgabe jetzt? Wie viele kommen hinzu? Wie würde die Aufgabe lauten, wenn noch eine Reihe hinzugelegt würde?“), Entsprechendes für das Weglegen oder Wegstreichen von Punkten oder Plättchen
- Situationen zum Aufteilen und Verteilen nachspielen, zeichnen und in einer Rechnung notieren *(kira.dzlm.de/672)*, z. B. 24 Kinder sind in der Sporthalle. Die Kinder sollen sich in 3er-Gruppen aufstellen. ‚Wie viele Gruppen entstehen?´ *(aufteilen)* oder ‚Hanna, Noah, Isabel und Leon spielen ein Kartenspiel mit 36 Karten. Alle Karten sollen verteilt werden. Wie viele Karten bekommt jeder?' *(verteilen),* dabei (verschiedene) mögliche Vorgehensweisen besprechen

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

Inwiefern ist das Kind in der Lage …

- Kernaufgaben in einem Punktefeld darzustellen?
- Kernaufgaben linear darzustellen?
- Beziehungen zwischen Kernaufgaben verschiedener Einmaleinsreihen herzustellen?
- die Kernaufgaben zu automatisieren?

## 9.2 EINMALEINS UND EINSDURCHEINS VERNETZEN

Damit die Lernenden das Einmaleins durch die Vernetzung der Einzelaufgaben erlernen können, müssen sie über einige Voraussetzungen verfügen: Sie müssen sicher und geläufig im Hunderterraum addieren und subtrahieren sowie verdoppeln und halbieren können. Hierzu müssen sie über ein tragfähiges Zahlverständnis, insbesondere über ein sicheres Verständnis des Stellenwertsystems verfügen.
Außerdem ist ein sicheres Operationsverständnis unverzichtbar. Das sind aber nicht nur Voraussetzungen zum verständnisbasierten Erlernen des Einmaleins mit dem Ziel der nachfolgenden Automatisierung, sondern auch dafür, dass die Lernenden ab Mitte des 2. Schuljahres überhaupt erfolgreich am Mathematikunterricht teilnehmen können (Gaidoschik, 2014, S. 25).
Zusammenhänge werden beim Vernetzen zunächst dazu verwendet, um Ergebnisse von Aufgaben aus anderen, bereits bekannten Aufgaben abzuleiten. Dieses Ableiten wird gezielt geübt. Die Lernenden üben also beispielsweise zunächst gezielt 6mal x-Aufgaben, also wie sie zum Beispiel 6 · 4 aus 5 · 4 + 1 · 4 ermitteln können.
Das ist ein anderer Ansatz, als die Sechserreihe isoliert von vielen mathematischen Zusammenhängen zu üben (6 · x-Aufgaben und x · 6-Aufgaben). So soll das Ableiten nach und nach überflüssig werden, denn mehr und mehr Aufgaben können als Hilfsaufgaben fungieren, von denen man ableiten kann. Auch hier gilt: Vor der Automatisierung einzelner Aufgaben steht die Automatisierung von Ableitungsstrategien. Kinder mit besonderen Schwierigkeiten in Mathematik benötigen oft mehr Zeit, mehr Anregung und mehr Übung als andere Schülerinnen und Schüler. Aber sie verstehen das Ableiten, wenn man in geeigneter Weise geduldig mit ihnen arbeitet (Gaidoschik, 2014, S. 24). Und wenn sie diese Strategien verstanden haben und anwenden können, dann spielt es auch keine große Rolle mehr, dass sie sich mit dem Auswendiglernen häufig schwerer tun als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler, weil sie nicht mehr so viel auswendig lernen müssen.
Wichtig ist, dass die Ableitungsstrategien bedeutungstragend behandelt werden, an geeigneten Materialien und begleitet durch eine verständnisfördernde Sprache. 6 Vierer(gruppen) sind 5 Vierer(-gruppen) und 1 Vierer(gruppe), ist für die Lernenden leichter zu verstehen und zu kommunizieren als 6 · 4 gleich 5 · 4 plus 1 · 4.

| | | |
|---|---|---|
| 3 · 3<br>**4 · 3** | 5 · 3<br>**6 · 3** | 5 · 3<br>**7 · 3** |

Mit der 1·1-Aufgabenkartei bietet PIKAS ein bewährtes Format zur Vernetzung der verschiedenen Aufgaben des Einmaleins an. Es besteht aus zwei Aufgabensätzen. Satz 1 enthält die sog. Kernaufgaben, deren Beherrschung Voraussetzung für das Üben mit Aufgabensatz 2 ist, bei dem zu einer Aufgabe jeweils auch eine dazu passende Kernaufgabe angegeben ist, die benutzt werden kann, um aus ihr das Ergebnis der eigentlichen Aufgabe abzuleiten. Sie finden das Material auf *pikas.dzlm.de/03*3 sowie ein illustrierendes Video auf *pikas.dzlm.de/032*.
Auch für die anderen Grundrechenarten existieren entsprechende Aufgabenkarteien sowie weiteres Übungsmaterial *(pikas.dzlm.de/443).*

# Anregungen für den Unterricht

## BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Haben die Lernenden ausreichend Gelegenheit, Einmaleinsaufgaben mit Kernaufgaben zu vernetzen und Zusammenhänge zu begründen?
- Wird das Einsdurcheins (durch Anbindung an das Einmaleins) hinreichend geübt?
- Bietet mein Klassenraum visuelle Darstellungen der Aufgabenbeziehungen wie z. B. Einmaleinstafel, Kernaufgaben oder zerlegte Punktefelder?
- Welche Anregungen bietet mein Schulbuch zu den Kernaufgaben und den Aufgabenbeziehungen?

## UNTERRICHTSANREGUNG ‚ABLEITUNGSSTRATEGIEN AUTOMATISIEREN'

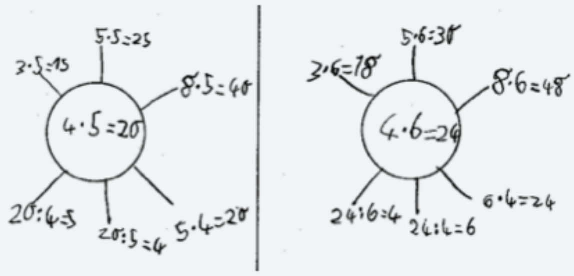
| | | |
|---|---|---|
| **2 · 3**<br>3 · 2 | **2 · 4**<br>4 · 2 | **2 · 6**<br>6 · 2 |
| **5 · 3**<br>3 · 5 | **5 · 4**<br>4 · 5 | **5 · 6**<br>6 · 5 |
| **10 · 3**<br>3 · 10 | **10 · 4**<br>4 · 10 | **10 · 6**<br>6 · 10 |

| | | |
|---|---|---|
| **2 · 7**<br>7 · 2 | **2 · 8**<br>8 · 2 | **2 · 9**<br>9 · 2 |
| **5 · 7**<br>7 · 5 | **5 · 8**<br>8 · 5 | **5 · 9**<br>9 · 5 |
| **10 · 7**<br>7 · 10 | **10 · 8**<br>8 · 10 | **10 · 9**<br>9 · 10 |

Die Lernenden üben zunächst die Kernaufgaben (1mal, 2mal, 5mal und 10mal) mit Aufgabenkarten. Dabei lernen sie zunächst die fettgedruckten Aufgaben mit Ergebnis. Wenn sie diese auswendig gelernt haben, lernen sie auch die jeweilige Tauschaufgabe *(pikas.dzlm.de/033)*.
Entsprechendes gilt für das Einsdurcheins: Die Lernenden setzen die Einsdurcheinsaufgaben als Umkehraufgaben zu den Einmaleinsaufgaben in Beziehung, z. B. 80 : 8 = 10, weil 10 · 8 = 80. Die Einsdurcheins-Aufgabenkartei *(pikas.dzlm.de/414)* verfügt über Kernaufgaben und ihre Tauschaufgaben, Aufgaben zum Ableiten von Kernaufgaben, umgekehrte Quadratzahlaufgaben, Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben, Nachbaraufgaben, Aufgaben zum Konstanzgesetz des Quotienten (16 : 4 = 8 : 2) und gemischte Aufgaben. Wichtig ist es sowohl beim Einmaleins als auch beim Einsdurcheins, dass diese Automatisierung von Ableitungsstrategien auf einer soliden Verständnisgrundlage basieren muss und nicht verfrüht erfolgen darf.

## WEITERE ANREGUNGEN

- Mal-Durch-Sonnen zeichnen lassen, darüber reden: „Bei welcher Sonnen-Aufgabe findest du schnell viele Möglichkeiten, bei welcher nicht? Bei welcher findest du am meisten Aufgaben?"




- Finde verschiedene Rechenwege. Auch hier: „Bei welchen Aufgaben findest du schnell viele Möglichkeiten, bei welchen nicht? Wo findest du die meisten Rechenwege?"
- Beziehungen zwischen Nachbaraufgaben auf der Einmaleinstafel aufdecken und in Punktefelder übertragen
- Aufgabenkärtchen mit Multiplikations- oder Divisionsaufgaben sortieren (leichte Aufgaben, schwierige Aufgaben; oder Aufgaben zusammenlegen, die zusammengehören)
- Zu vorgegebenen Aufgaben (wie z. B. 5 · 6) andere Aufgaben finden, bei denen 5 · 6 hilft (z. B. 6 · 4; 4 · 6; 30 : 5; 30 : 6 etc.)
- Ableitungsstrategien üben mit Zweierpäckchen wie 10 · 8 = und 9 · 8 = ; 10 · 5 = und 9 · 5 =, etc.
- Hinreichend viele Übungen wie Mal-Plus-Häuser oder Mal-Mühlen als Übung für das kleine Einmaleins und zur Aufdeckung von Aufgabenbeziehungen nutzen *(pikas.dzlm.de/026 bzw. 276)*

## BEOBACHTUNGSASPEKTE

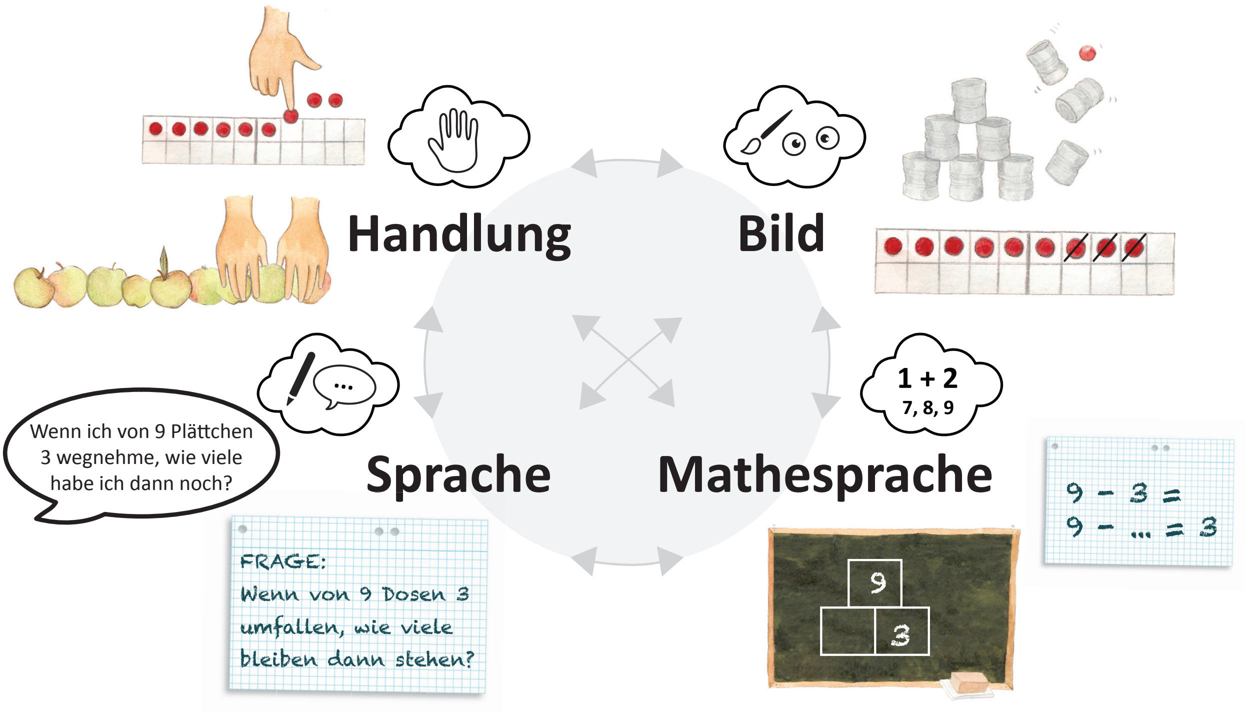
Inwiefern ist das Kind in der Lage …

- Einmaleinsaufgaben von Kern- und Quadratzahlaufgaben korrekt abzuleiten?
- verschiedene Strategien beim Ableiten anzuwenden und zu erklären?
- zueinander passende Multiplikations- und Divisionsaufgaben zu benennen?
- Divisionsaufgaben mit Hilfe der Umkehraufgaben zu lösen?

# 10 Darstellungen

- Unterrichtsanregungen zur Förderung des Darstellungswechsels *(pikas.dzlm.de/320)*
- Guter Einsatz von Darstellungsmitteln *(Fortbildungsmaterial, pikas.dzlm.de/447)*
- Guter Umgang mit Darstellungsmitteln *(Unterrichtsmaterial, pikas.dzlm.de/252)*
- Vier-Phasen-Modell *(pikas.dzlm.de/420)*

Was sind Darstellungen, Darstellungsformen, Darstellungsebenen, Darstellungsmittel? Unter den Begriff der Darstellungen im Mathematikunterricht fallen bekanntlich Material, Bilder, Sprache und Mathesprache (mathematische Symbole). Wie die Ausführungen vorangehender Kapitel verdeutlichen, ist es von zentraler Bedeutung, diese auf vielfältige Weise miteinander zu vernetzen, damit die Lernenden Mathematik verständig erwerben können.

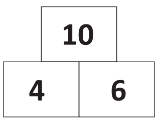



## 10.1 DARSTELLUNGSFORMEN UND DARSTELLUNGSMITTEL

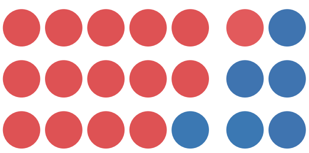
„Darstellungen" ist also der Oberbegriff für die vier sog. Darstellungsformen. Zwar gibt es hier eine gewisse Reihung in dem Sinne, dass man zunächst am Material handelt und dann bildliche und textliche Darstellungen verwendet, bevor man zur symbolischen Darstellung übergeht. Aber hierbei handelt es sich nicht um einen Automatismus, denn es gibt beispielsweise Lerninhalte, wie die Orientierung oder das Rechnen im Millionraum, bei denen man keine Handlungen mehr durchführt. Oder man verzichtet bei der schriftlichen Addition auf Rechengeschichten, bevor man die Darstellung in Mathesprache behandelt. Im Unterricht sollten alle Darstellungsformen mit ihren jeweiligen besonderen Stärken genutzt werden *(pikas.dzlm.de/447)*.
Außerdem handelt es sich hierbei nicht um eine Einbahnstraße. Das schnelle Durchstarten zur symbolischen Endform führt insbesondere bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten dazu, dass diese die verschiedenen Darstellungsformen nicht zueinander in Beziehung setzen können und lediglich mit für sie weitgehend bedeutungslosen Symbolen hantieren. Insbesondere die Rückübersetzungen in nicht-symbolische Darstellungen erweisen sich dann häufig als schwierig. Auch wenn die Lernenden beispielsweise Aufgaben des Einspluseins in der Mathesprache beherrschen, ist es immer wieder sinnvoll, zunächst zu den entsprechenden bildlichen Darstellungen zurückzukehren, um Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten zu vertiefen. Daher sprechen wir auch von Darstellungsformen, und nicht von Darstellungsebenen, da dieser Begriff klare Hierarchisierungen nahelegen könnte. Für die unterschiedlichen Darstellungsformen gibt es nun unterschiedliche Dar-

stellungsmittel. Wir verwenden im Weiteren Beispiele aus dem Bereich ‚Zahlen und Operationen'; die grundlegenden Aussagen sind jedoch auch auf andere Inhaltsbereiche übertragbar. Grundsätzlich kann man in der Darstellungsform der Handlungen unterscheiden zwischen Handlungen mit *Alltagsmaterial* (wie Äpfeln, Kastanien oder Bauklötzen) und mit *didaktischem Material* (Zwanzigerfeld mit Plättchen, Zwanziger-Rechenrahmen oder Zwanzigerkette). Letztere sind speziell für den Mathematikunterricht konzipiert, berücksichtigen also wichtige fachdidaktische Aspekte wie etwa die Fünfer- oder die Zehnerstruktur, die für die Ausbildung nicht zählender Rechenstrategien von zentraler Bedeutung sind. Alltagsmaterialien können den Einstieg in Themengebiete erleichtern und den Aufbau von Vorstellungen unterstützen, da sie den Lernenden Anknüpfungspunkte aus der Umwelt bieten. Zur Einsicht in Strukturen und Zusammenhänge sind didaktische Materialien besser geeignet.

Vergleichbares gilt für bildliche Darstellungen, auch hier gibt es Darstellungen von Alltagsmaterial und von didaktischem Material, und auch hier haben beide ihren spezifischen Platz im Lernprozess. Bei den sprachlichen Darstellungen lassen sich Rechengeschichten und Darstellungen von Rechenwegen als Hauptformen unterscheiden. Bei den Darstellungen in Mathesprache sind es in der Primarstufe die klassischen Zahlensätze (3 + 6 = 9) sowie alternative Darstellungen, wie z.B. die Zahlenmauerdarstellung.




Die Nutzung unterschiedlicher Darstellungsformen und hier insbesondere der Einbezug von Handlungen und Bildern ist nicht nur beim Aufbau von Zahl- und Operationsverständnis und bei der Entwicklung und Dokumentation von Vorgehensweisen (z. B. Rechenstrategien), sondern auch beim Entdecken, Beschreiben und Begründen von Beziehungen und Besonderheiten von zentraler Bedeutung. In Entdeckerpäckchen beispielsweise können die Plättchen dazu dienen, nicht nur zu erkennen, dass jeweils dasselbe Resultat herauskommt, sondern auch zu verstehen, warum dies so ist: Es wird jeweils ein blaues Plättchen weniger und ein rotes Plättchen mehr; an der Gesamtzahl ändert sich aber nichts.



6 + 1 = 7
5 + 2 = 7
4 + 3 = 7

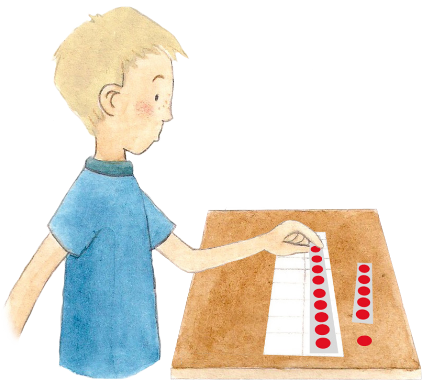
Schließlich ist noch eine Funktion zu nennen. Natürlich muss arithmetisches Grundwissen langfristig automatisiert werden, und Grundfertigkeiten müssen geläufig beherrscht werden. Das Auswendiglernen und das Geläufigkeitstraining sind somit nicht aus dem Unterricht zu verbannen, aber sie sollten an das Ende des Lernprozesses rücken. Das bedeutet freilich nicht, dass erst abschließend geübt wird. Die Übung durchzieht den gesamten Lernprozess. Nur Üben ist nicht gleichzusetzen mit Mechanisieren, sondern gilt als integraler Bestandteil eines entdeckenden Lernprozesses (Kap. 11).

Schließlich gilt: Materialeinsatz ist nicht per se gut, sondern nur bei qualitätsvollem Material. Dieses sollte …

- die zu erwerbenden Grundvorstellungen verkörpern;
- über die Schuljahre hinweg fortsetzbar sein, sodass es vielfältig nutzbar ist und seine Struktur sich auf unterschiedliche Inhaltsbereiche und Arbeitsformen anwenden lässt;
- helfen, die Verfestigung des zählenden Rechnens zu vermeiden bzw. abzubauen;
- Übertragungen in eine von den Lernenden vorstellbare Form gestatten, so dass die Zahldarstellungen und die arithmetischen Operationen im Kopf ausführbar werden;
- es den Lernenden ermöglichen, eigene Vorgehensweisen zu entwickeln, um diese mit den Mitlernenden auszutauschen und zu diskutieren;
- sich durch Übersichtlichkeit und leichte Handhabbarkeit auszeichnen sowie
- möglichst geringe Kosten verursachen.

## 10.2 VIER-PHASEN-MODELL

Um Kinder dabei zu unterstützen, Vorstellungen aufbauen zu können, hat sich das sog. Vier-Phasen-Modell (Schipper, Wartha & von Schroeders, 2011; Wartha & Schulz, 2014) bewährt. Der Grundgedanke besteht darin, konkrete Materialhandlungen gedanklich vollziehen zu können (im Weiteren: *pikas.dzlm.de/420).* Anfängliche Handlungen am Material werden nach und nach zugunsten mentaler Vorstellungen abgelöst.

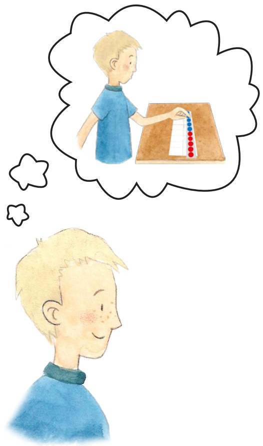


**1. Das Kind handelt an geeignetem Material.**
**Die mathematische Handlung wird beschrieben.**
***Zentral:* Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.**

In Phase 1 operiert das Kind mit Material, das für die aufzubauende Vorstellung geeignet erscheint. Für die nicht zählende Zahldarstellung können hierzu das Zwanzigerfeld mit einzelnen Plättchen sowie Fünfer- und Zehnerstreifen herangezogen werden. Alternativ wäre es auch denkbar, den Rechenrahmen heranzuziehen. Je nachdem, welches Arbeitsmittel genutzt wird, sind passende nicht zählende Handlungen vom Kind vorzunehmen. So wäre es für die Darstellung der Zahl 17 zentral, Plättchen nicht nur einzeln nacheinander zu legen. Durch die Nutzung der Zehner- und Fünferstreifen können Beziehungen der darzustellenden Zahl zur Fünf und zur Zehn herausgestellt werden. Obiges Vorgehen kann mit verschiedenen Zahlen durchgeführt werden. Sofern Lernende die darzustellenden Zahlen nicht zählend am Zwanzigerfeld darstellen und eine gewisse Routine der Abläufe festzustellen ist, kann der Übergang zu Phase 2 erfolgen.


**2. Das Kind beschreibt die Handlung mit Sicht auf das Material. Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.**

In der zweiten Phase wird die Materialhandlung nicht – wie noch in Phase 1 – vom Lernenden selbst durchgeführt. Zentraler Inhalt dieser Phase ist es, dass die zuvor durchgeführte Materialhandlung nur noch versprachlicht wird. So ist es die Aufgabe eines Kindes in dieser Phase, einer anderen Person (z. B. einer Förderlehrkraft oder einem Mitschüler bzw. einer Mitschülerin) die durchzuführenden Materialhandlungen zu diktieren. Dabei hat das Kind nicht nur die Aufgabe, zu beschreiben, wie sein Gegenüber handeln soll. Auch ist es die Aufgabe, die Materialhandlungen zu überprüfen, indem selbige aufmerksam beobachtet werden.
Erfahrungen zum Einsatz des Vier-Phasen-Modells in Partnerarbeit haben gezeigt, dass dasjenige Kind, welches in dieser Phase die Handlung durchführt, dazu neigen kann, Handlungen durchzuführen, die es selbst mit dem jeweiligen Arbeitsauftrag verbindet. Die versprachlichten Anweisungen des Partnerkindes fließen nicht immer so ein, wie es sein sollte. In diesem Zusammenhang hat es sich als gewinnbringend herausgestellt, dass die Aufgabe bzw. der Arbeitsauftrag lediglich dem Kind präsentiert wird, welches die Handlungen diktieren soll. Dem handelnden Kind wird selbiger erst nach dem Darstellungsprozess vorgelegt, um eine Überprüfung vorzunehmen. Auf diese Weise kann eine Orientierung der Handlungen mit den Versprachlichungen des Partnerkindes hergestellt werden.

**3. Das Kind beschreibt die Handlung ohne Sicht auf das Material. Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.**

Die darauffolgende dritte Phase stimmt strukturell mit der Phase 2 überein. Auch hier ist es die Aufgabe des Lernenden, die in Phase 1 eigenständig durchgeführte Materialhandlung exakt zu diktieren und von einer anderen Person durchführen zu lassen. Jedoch besteht zwischen den Phasen 2 und 3 ein zentraler Unterschied, den es zu beachten gilt: Während in Phase 2 noch die Sicht auf die Materialhandlung des Gegenübers möglich ist, hat das Kind in Phase 3 keine Möglichkeit mehr, die Materialhandlung der zweiten Person direkt zu beobachten. Dies kann entweder durch das Verbinden der Augen oder durch Wegdrehen erreicht werden oder man stellt einen Sichtschirm zwischen den Kindern auf.  Auf diese Weise wird das diktierende Kind angeregt, den Ablauf der Materialhandlung ausschließlich in der Vorstellung nachzuvollziehen. Dadurch geht das Kind einen bedeutenden Schritt weg von der konkreten Materialhandlung in Richtung gedanklicher Operation. Das Kind muss zu jedem Zeitpunkt sowohl die bereits durchgeführten und noch zu vollziehenden Materialhandlungen als auch die jeweils gegenwärtige ikonische Darstellung in der Vorstellung abrufen können.

**4. Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert. Gegebenenfalls wird die Handlung in der Vorstellung aktiviert.**

Abschließend wird auf den handelnden Umgang mit Material verzichtet, indem Lernende lediglich auf symbolischer Ebene üben und automatisieren. Die Tatsache, dass die Schülerinnen und Schüler das Material nicht mehr für den Zahldarstellungsprozess nutzen, bedeutet keineswegs, dass Handlungen in dieser abschließenden Phase des Vier-Phasen-Modells irrelevant sind. Die in den Phasen 1 bis 3 selbst durchgeführten oder diktierten Materialhandlungen werden nun in der Vorstellung vollzogen und geprüft. Das Kernelement dieser Phase ist somit, die Kinder (verbal- oder nonverbal-symbolisch dargestellte) Aufgaben auf der Grundlage verinnerlichter Handlungen gedanklich lösen zu lassen.
Es ist natürlich das Ziel, Kinder von konkreten Handlungen am Material zu lösen. Allerdings sollen sie auch noch in späteren Phasen dazu angeregt werden, diese Materialhandlungen gedanklich zu vollziehen. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass das Vier-Phasen-Modell keineswegs als ein Stufenmodell zu verstehen ist. Die Phasen werden also nicht zwingend nacheinander durchgeführt. Für den Fall, dass Kinder beispielsweise offenkundig Schwierigkeiten in Phase 3 dabei haben, die Materialhandlungen ohne Sicht auf Selbiges exakt zu diktieren, kann eine erneute Durchführung der zweiten Phase hilfreich sein. Genauso kann auch ein Rückbezug von der vierten in die dritte Phase sinnvoll sein. Es darf nicht das primäre Ziel des unterrichtlichen Einsatzes des Vier-Phasen-Modells sein, dieses schnellstmöglich ‚abzuarbeiten'. Wesentlich sollte sein, dass Kinder tragfähige Vorstellungsbilder entwickeln.

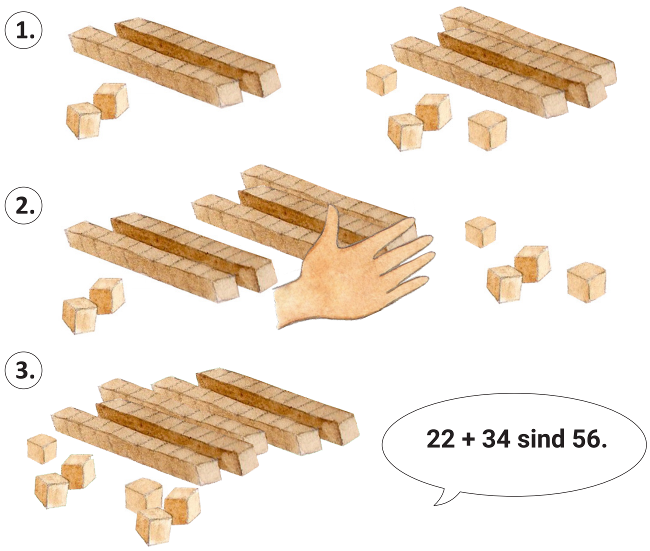
# 11 Üben! Üben! Üben!

- Gestütztes Üben *(primakom.dzlm.de/480)*
- Strukturiertes Üben *(primakom.dzlm.de/210)*
- Blitzrechenplakate *(pikas.dzlm.de/257)*

Jetzt heißt es ‚Üben! Üben! Üben!' Wie dieser einprägsame Ausspruch suggeriert, gilt als wesentliches Kennzeichen des Übens die Wiederholung, das Nocheinmal-Ausführen. Von ‚Üben' spricht beispielsweise Wittmann (1992) dann, wenn ein *Satz von Wissenselementen* (z. B. Einspluseins), eine *Fertigkeit* (z. B. schriftliches Addieren) oder eine *Fähigkeit* (z. B. Beschreibung von Auffälligkeiten) bei einer Serie von gleichartigen Aufgaben wiederholt angesprochen wird.
Im deutschsprachigen Raum haben insbesondere Winter (1984) und Wittmann & Müller (1990; 1992) die Vorstellung revidiert, ein Stoff müsse zuerst eingeführt werden, bevor sich unmittelbar eine längere Phase automatisierenden Übens anschließe. Einführen und Üben seien keine strikt voneinander zu trennenden Phasen, sondern eng miteinander verzahnt: „Üben ist damit im Wesentlichen das Wiederaufnehmen eines (entdeckenden) Lernprozesses, das Nocheinmalnachbilden, Nocheinmalnachbauen von Lernsituationen. An der zunehmenden (und nicht schon gleich vermittelten) Mechanisierung von Verfahren, an der Verflechtung von Wissen sowie an der geläufigeren Handhabung von Strategien werden die Schüler bewußt und aktiv beteiligt" (Winter, 1984, S. 10).
Sieht man also gemäß dieser Philosophie Üben als integralen Bestandteil eines aktiven Lernprozesses, so muss eine sorgfältige Analyse erfolgen, welche verschiedenen Typen von Übungsformen es gibt und wo deren jeweiliger Ort im Lernprozess liegt. Die aus unserer Sicht vier Haupttypen des Übens sollen im Folgenden mit ihren Spezifika beschrieben werden (s. Abb. S.55, *pikas-mi.dzlm.de/node/53)*.

## 11.1 GRUNDLEGENDES ÜBEN

Beim formalen Üben werden die Aufgaben in der symbolischen Darstellungsform behandelt; beim grundlegenden Üben hingegen stützen sich die Aufgabenbearbeitungen auf lebensweltliche Situationen, bildliche Darstellungen oder Material. Das Lernen von Mathematik besteht im Wesentlichen darin, sich von konkreten Beispielen zu lösen, aber immer auch wieder zu ihnen zurückkehren zu können. 5 + 3 ist 8, unabhängig davon, ob man Anzahlen beispielsweise von Äpfeln, Kindern, Autos oder Plättchen addiert. Handlungen sollen von den Kindern zunächst durchgeführt und dann verinnerlicht und im Geiste nachvollzogen werden.
Langfristiges Ziel allen Arbeitens mit Material oder bildlichen Darstellungen ist es, dass die Kinder sich nach und nach vom Material lösen und die Rechenoperationen ‚im Kopf' durchführen können (Kap. 10.2). Insbesondere beim Üben sollte darauf geachtet werden, dass die durchzuführenden Handlungen am Material oder an bildlichen Darstellungen strukturgleich zur angestrebten Vorstellung im Kopf sind. Die Ausbildung von Vorstellungsbildern und das mentale, nur vorgestellte Operieren mit dem entsprechenden Material sollte ohne ein ‚Umlernen' möglich sein, so dass beispielsweise am Material nicht immer in Einerschritten operiert werden sollte, wenn später im Kopf größere Schritte durchgeführt werden sollen.




Weiterhin soll das Material die Verfestigung des zählenden Rechnens vermeiden helfen bzw. die Ablösung vom zählenden und den Übergang zum denkenden Rechnen unterstützen. Auch sollte es verschiedene individuelle Bearbeitungs- und Lösungswege zu ein und derselben Aufgabe ermöglichen und die Ausbildung flexibler Rechenstrategien unterstützen.

Weiterhin sollte das Material Übertragungen in eine von den Lernenden zeichenbare Form gestatten. Die Materialauswahl sollte gezielt stattfinden, es sollten nicht zu viele verschiedene Materialien eingesetzt werden, da jedes Material zusätzlichen Lernstoff bedeutet. „Außerdem ist zu beachten, dass der Lernerfolg nicht mit der Masse der Materialien, sondern mit der Reichhaltigkeit und Intensität der Schüleraktivitäten steigt“ (Wittmann & Müller, 1990, S. 8).
Wichtig ist dabei nicht nur die Handlungserfahrung selbst, sondern auch das Sprechen darüber und die Versprachlichung der Handlung. Dieser Darstellungswechsel zwischen Sprache, Symbol, bildlicher Darstellung und Handlung am Material hilft, tieferes Verständnis aufzubauen (vgl. z. B. Kap. 4.2).
Darstellungsmittel können daher als *‚Instrument des Erkennens‘*, aber auch als *‚Instrument des Kommunizierens‘* fungieren. Beim grundlegenden Üben können so Muster und Beziehungen leichter erkannt werden. Und überall da, wo Worte fehlen, wo Kinder Schwierigkeiten haben, sich anderen mitzuteilen, können sie die Gedanken der Kinder, die entdeckten Strukturen und Muster sichtbar machen.
Der Einsatz von Darstellungsmitteln sollte nicht nur (aber natürlich auch) als Hilfe für leistungsschwächere Kinder dienen, sondern ist für alle Kinder wichtig. Darstellungsmittel sind mehr als nur Hilfsmittel zum Rechnen!
Ihr Einsatz im Unterricht wird leider oft als Zeichen von Lernschwäche interpretiert:

> **Die Plättchen können dir helfen!**
> **Du hast den Zahlenstrahl als Hilfe verwendet.**

Dies führt zuweilen zur Abwertung von erbrachten Leistungen.

**Fazit:** Das Material zielt insbesondere am Anfang, in der ‚Grundlegungsphase‘, nicht sofort auf das vorschnelle Auswendiglernen, sondern auf das einsichtige Entwickeln von Zahl- und Operationsverständnis sowie von Rechenstrategien. Diese werden in der Phase des vernetzenden Übens in besonderer Weise thematisiert.

## 11.2 VERNETZENDES ÜBEN

Vernetzendes Üben meint, dass Beziehungen zwischen Zahlen und Aufgaben thematisiert und benutzt werden, um auch im Übungsprozess bekannte Aspekte vernetzen bzw. neue Aspekte entdecken zu können. Beim vernetzenden Üben besteht das Ziel darin, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, wie sie noch nicht bekannte Wissenselemente oder nicht beherrschte Fertigkeiten aus bereits Bekanntem oder Beherrschtem ableiten können. Hierbei sind also Übungen erforderlich, mit deren Hilfe die Schülerinnen und Schüler lernen, die Beziehungen von Zahlen und Rechenoperationen auszunutzen, um auf dieser Grundlage Wissen zu erzeugen oder zu festigen. Hier geht es entscheidend darum, dass die Kinder Strategien erlernen und perspektivisch auch ‚automatisieren’, die für viele Aufgaben hilfreich sind, statt viel Energie in die Automatisierung von Einzelfakten zu stecken. So lernen sie, dass sie mit sogenannten Hilfsaufgaben durch eine kleine Variation weitere Aufgaben berechnen können – auch in größeren Zahlräumen (vgl. die vorangehenden Kapitel)

$$\mathbf{7 \cdot 5 = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5}$$

$$\mathbf{12 \cdot 5 = 10 \cdot 5 + 2 \cdot 5}$$

$$\mathbf{72 \cdot 5 = 50 \cdot 5 + 20 \cdot 5 + 2 \cdot 5}$$

## 11.3 ENTDECKENDES ÜBEN

Beim entdeckenden Üben sind die Aufgaben einer Übungsserie durch einen ganzheitlichen Strukturzusammenhang aufeinander bezogen (Synonym: strukturiertes Üben); die Lösungswege und die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben stehen in einem Zusammenhang und können sich gegenseitig unterstützen und korrigieren. Hier setzen sich die Kinder aktiv mit Beziehungen zwischen den Aufgaben auseinander. Während die Kinder diese entdecken, führen sie gleichzeitig mathematische Basisfähigkeiten aus und ‚üben’ diese somit nahezu ‚nebensächlich’.
Dabei sind auch die prozessbezogenen Kompetenzen von Bedeutung, da die Kinder die Beziehungen nicht nur entdecken, sondern diese auch beschreiben und erläutern müssen, um die Einsichten zu vertiefen.
Von zentraler Bedeutung für das entdeckende Üben ist somit die Auswahl ergiebiger Aufgaben. Aufgabenserien wie z. B. Entdeckerpäckchen liefern reichlich Potenzial für Entdeckungs- und Beweisaktivitäten *(pikas.dzlm.de/161).*

**Entdeckerpäckchen**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 + 8 = 9 | 16 - 10 = | 2 · 4 = | 16 : 8 = |
| 3 + 8 = 11 | 14 - 9 = | 2 · 5 = | 14 : 7 = |
| 5 + 8 = 13 | 12 - 8 = | 2 · 6 = | 12 : 6 = |
| 7 + 8 = 15 | 10 - 7 = | 2 · 7 = | 10 : 5 = |
| 9 + 8 = 17 | ___ | ___ | ___ |
| 11 + 8 = 19 | ___ | ___ | ___ |

Mir fällt auf, dass hier immer die Ergebnisse 2 Zahlen weiter gehen, weil die erste Pluszahl ungerade ist.

Der Zusammenhang solcher Aufgaben kann auch im Umkreis einer übergeordneten Fragestellung innerhalb eines mathematisch substanziellen Problemkontextes angesiedelt werden. So stellen auch Auseinandersetzungen mit Problemstellungen innerhalb von Übungsformaten, wie z. B. Zahlenketten oder Rechendreiecke, zentrale Lerngelegenheiten dar, um entdeckend zu üben *(pikas.dzlm.de/360)*.

**Fazit:** Sicherndes Üben sollte nicht verfrüht erfolgen, sondern stets auf einer sicheren, durch eine wachsende Vernetzung geschaffenen Verständnisgrundlage aufbauen.

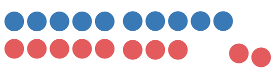
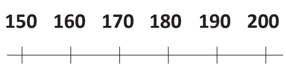
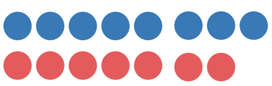
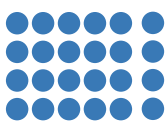
## 11.4 SICHERNDES ÜBEN

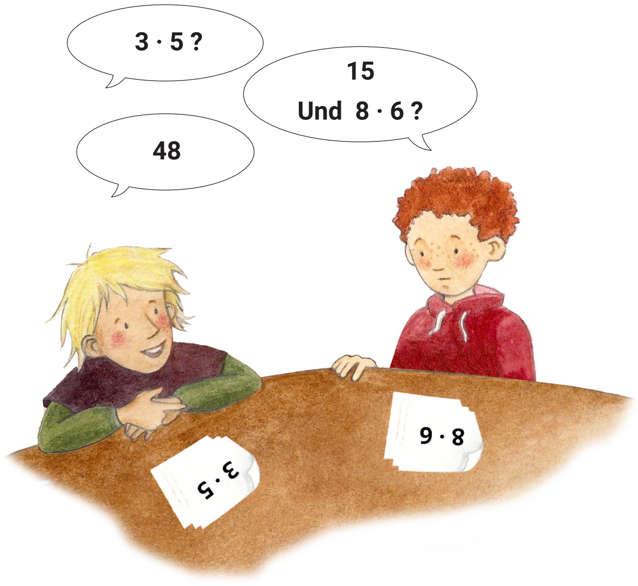
Beim sichernden Üben können zwei Unterkategorien identifiziert werden. Das automatisierende, Kenntnisse sichernde Üben zielt darauf ab, dass die Schülerinnen und Schüler Kenntnisse oder Fertigkeiten gedächtnismäßig (automatisiert) oder blitzartig (durch schnelles Ableiten von automatisiertem Wissen) zur Verfügung haben. Das betrifft Aufgaben wie 4 + 7, 7 – 4, 2 · 7 oder 200 : 2. Solche unmittelbar abrufbaren Kenntnisse und schnell ausführbaren Fertigkeiten bilden die Basis allen Rechnens. Sie bauen auf soliden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen auf und werden im Lehrplan *schnelles Kopfrechnen*, auch *Blitzrechnen* (Wittmann & Müller, o. J.) genannt. Welche Teilkompetenzen darunter verstanden werden können, wird im Folgenden anhand von jeweils zwei ausgewählten Beispielen für die vier Schuljahre illustriert (vgl. Selter & Zannetin, 2019, S. 60). Die Abbildungen verdeutlichen nicht nur ausgewählte Teilkompetenzen des schnellen Kopfrechnens, sie illustrieren auch den Weg zu ihrem aktiven und beziehungsreichen Erwerb. Denn Mathematiklernen ist kein Auswendiglernen von beziehungslosen Vokabeln. Verfrühtes Auswendiglernen ist nicht nur ein ‚Verständniskiller', sondern führt auch – und gerade aus diesem Grund – zu unbefriedigenden Leistungen der Lernenden.

Daher sollte der Unterricht beispielsweise beim Erlernen des Einspluseins oder des Einmaleins die Beziehungen zwischen den einzelnen Aufgaben untereinander sowie die anschauungsgestützten Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen nutzen. Hierzu ist intensives regelmäßiges Üben erforderlich.

Im Anschluss an die Phasen des grundlegenden, vernetzenden und des entdeckenden Übens schließt sich die sogenannte Automatisierungsphase an, die also am Ende des Lernprozesses anzusiedeln ist. Die Verwendung von Anschauungsmaterial sowie die bewusste Nutzung von Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen wird zurückgefahren. Die Schnelligkeit im Abrufen der Kenntnisse und Fertigkeiten wird im Gegenzug erhöht.

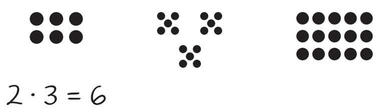
Neben dem automatisierenden, Kenntnisse sichernden Üben, bei dem es darum geht, Fakten abrufbar oder schnell ableitbar zur Verfügung zu haben, muss auch dem Fertigkeiten sichernden Üben hinreichend viel Zeit eingeräumt werden. Die Strategien des halbschriftlichen oder die Verfahren des schriftlichen Rechnens müssen ebenfalls sicher und geläufig ausgeführt werden können.

| **1. Schuljahr** | **2. Schuljahr** | **3. Schuljahr** | **4. Schuljahr** |
|---|---|---|---|
| Anzahlen schnell erfassen<br> | Zum nächsten Zehner ergänzen<br> | Zahlwortreihe in Schritten aufsagen<br> | Additionsaufgaben durch Analogien lösen<br>150 + 20<br>150.000 + 20.000 |
| Aufgaben des kleinen Einspluseins auswendig wissen<br> | Aufgaben des kleinen Einmaleins auswendig wissen<br> | Zahlen mit 10 multiplizieren<br>T \| H \| Z \| E<br> \|  \| 4 \| 5<br> \| 4 \| 5 \| 0 | Divisionsaufgaben durch verwandte Aufgaben lösen<br>21 : 3<br>210 : 3<br>2.100 : 3<br>21.000 : 3 |

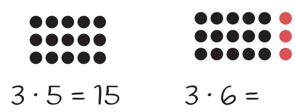



Abschließend sei zur Einordnung das Folgende gesagt: Die Betonung der Bedeutsamkeit der Sicherung mathematischer Basiskompetenzen stellt alles andere als einen Widerspruch zu der in Lehrplänen und Bildungsstandards zum Ausdruck kommenden starken Betonung der prozessbezogenen Kompetenzen dar. Denn ein Unterricht, der die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen in einem Konzept des aktiven Lernens realisiert, schafft die Verständnisgrundlage, die für eine verständnisbasierte Automatisierung notwendig ist (ohne Denken kein Rechnen). Und umgekehrt bilden automatisierte Grundkenntnisse die notwendige Voraussetzung für einen Unterricht, in dem die prozessbezogenen Kompetenzen in einem Konzept des aktiven Lernens realisiert werden (ohne Rechnen kein Denken).

**Grundlegendes Üben**
Grundvorstellungen aufbauen, zwischen Darstellungen wechseln
„Schreibe passende Mal-Aufgaben zu den Punkte-Bildern!"

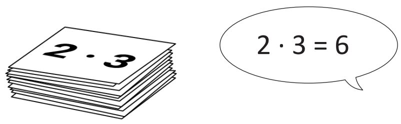



**Vernetzendes Üben**
Zahl- und Aufgabenbeziehungen herstellen und nutzen
„Nutze einfache Aufgaben, um schwierige Aufgaben zu lösen!"




**Entdeckendes Üben**
Übergeordnete Strukturen entdecken, beschreiben und begründen
„Finde alle Mal-Aufgaben mit dem Ergebnis 12! Zeichne passende Punktefelder! Warum kann es nicht noch mehr geben?"


**Sicherndes Üben**
Geläufigkeit erlangen, wichtige Aufgaben automatisieren
„Trainiere mit der Blitzaufgabenkartei!"




## 11.5 SYSTEMATIK, STRUKTUR UND AUSTAUSCH

Als grobe Orientierung stellen die vier Übungstypen auch vier ‚Phasen' im Lernprozess dar, insofern als zunächst grundlegend, dann vernetzend, entdeckend und schließlich sichernd geübt werden sollte. Allerdings darf diese Phasenfolge auch nicht zu strikt verstanden werden. Manche Schülerinnen und Schüler müssen noch grundlegend üben, andere arbeiten gleichzeitig schon an der Sicherung der Geläufigkeit. Zudem werden auch einzelne Lernende bei bestimmten Lerninhalten unterschiedlich üben: Denken Sie an das Einmaleins, manche Aufgaben haben die Kinder bereits automatisiert, bei anderen arbeiten sie beispielsweise noch daran, sie aus anderen abzuleiten. Dieses kann beim vernetzenden Üben oder auch formal erfolgen. Entscheidend für die Lernerfolge der Lernenden ist aus unserer Sicht, dass der Unterricht hinreichend viel Zeit für ein ausgewogenes Verhältnis aus den verschiedenen Übungstypen bietet und dass die zur Verfügung stehende Zeit dann auch lernwirksam genutzt wird. Hierzu sollen die in PIKAS entwickelten Materialien beitragen.

PIKAS liegt eine umfassende Theorie zur Gestaltung des Mathematikunterrichts zugrunde *(pikas.dzlm.de/pikas-theorie).* Es wird reichhaltiges Material zur Fortbildung und zur schulinternen Unterrichtsentwicklung angeboten. Alle Unterrichtsmaterialien auf der PIKAS-Webseite sind als Illustrationen des dazugehörigen Fortbildungs- und Informationsmaterials zu sehen und können zudem den Unterricht an diversen Stellen ergänzen. Die durch sie zum Ausdruck kommenden Ideen können auf andere Inhalte übertragen werden.

Aber: PIKAS bietet kein durchgängiges Material für den gesamten Unterricht. Hierzu bedarf es (in den meisten Fällen) eines guten Schulbuchs als Leitmedium des Unterrichts, welches die Lehrkraft – im Sinne der PIKAS-Theorie – tagtäglich dabei unterstützt …

- die notwendige Systematik der Inhalte, Aufgabenformate und Materialien über die gerade behandelten Themen und Schuljahre hinweg zu beachten,
- die erforderliche Struktur angesichts der individuell unterschiedlichen Lernstände und Lernmöglichkeiten einerseits und der zu erwerbenden prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen andererseits zu erzeugen sowie
- die kontinuierliche Anregung zu sachbezogenem und lernförderlichem Austausch mit Mitlernenden und der Lehrperson sicherzustellen.

Was bedeutet das?

*Erstens:* Im Sinne der PIKAS-Konzeption ist die Tendenz kritisch zu beurteilen, im Mathematikunterricht gänzlich auf Schulbücher zu verzichten. Denn es bedarf höchster mathematikdidaktischer Kompetenz, um in einem Unterricht der ‚Marke Eigenbau' die notwendige Systematik, die erforderliche Struktur und die kontinuierliche Anregung zum Austausch zu erreichen.

*Zweitens:* Ebenfalls ist es aus unserer Sicht kritisch zu sehen, wenn Schulbücher hauptsächlich als ‚Selbstlernhefte' eingesetzt werden. Denn dann müssen sich die Lernenden die Lerninhalte im Wesentlichen individualisiert, häufig ohne Austausch mit anderen aneignen – oft kleinschrittig, mit reduziertem fachlichen Anspruch und damit ohne Berücksichtigung der prozessbezogenen Kompetenzen. Diese Form von Mathematikunterricht mag zwar manchmal angesichts schwieriger Rahmenbedingungen aus unterrichtsorganisatorischer Sicht verständlich sein, ist aber in der Regel nicht nur für die Motivation der Kinder, sondern auch für deren mathematische Lernentwicklung als problematisch zu bezeichnen.

*Drittens:* Es ist zweifelsohne positiv zu sehen, dass für die Grundschule in den letzten Jahrzehnten viele Konzepte und Materialien entwickelt worden sind, die auch in der Unterrichtsrealität angekommen sind und die vernünftigerweise davon ausgehen, dass nicht jedes Kind immer und zum selben Zeitpunkt dasselbe machen und lernen kann. Insofern verabschiedet sich die Grundschule mehr und mehr vom Einheitsunterricht, der für alle Lernenden stets dasselbe Angebot vorsieht. Sie bietet somit ein Vorbild für die Arbeit in den anderen Schulformen.

Jedoch scheint uns im Unterricht der Primarstufe im Zuge der zunehmenden Individualisierung bzw. Öffnung des Unterrichts das Lernen voneinander und miteinander leider mehr und mehr verloren zu gehen. Im Zuge einer stärkeren Individualisierung des Unterrichts kann es aber nicht primär darum gehen, Kinder lediglich zu beschäftigen und in der Folge zu vereinzeln, sondern die zentrale Aufgabe von Lehrpersonen besteht darin, sie zu aktivem Lernen, zu produktivem Austausch und zu lernförderlicher Reflexion herauszufordern – dieses alles unter Berücksichtigung individuell unterschiedlicher Lernpotenziale.

Damit ist also keine übertriebene Individualisierung des Unterrichts gemeint. Ist dieser zu speziell auf jeden einzelnen Lernenden ausgerichtet, kann kein fachlicher Austausch mehr erfolgen, was dazu führt, dass Prozesse des Von- und Miteinanderlernens nicht mehr erfolgen können (Individualisierungsfalle; Brügelmann, 2011).

Das individuelle Lernen ist also stets durch das Lernen voneinander zu ergänzen. In der Auseinandersetzung mit anderen können die Schülerinnen und Schüler lernen, die eigene Sichtweise zu artikulieren, sich über andere Lösungswege auszutauschen und sachbezogene Rückmeldungen zu geben und zu nutzen. Außerdem können sie über verschiedene Herangehensweisen nachdenken und sie bewerten sowie gemeinsam an der Lösung mathematischer Aufgabenstellungen arbeiten.

Unterricht mit Systematik, Struktur und Austausch bedeutet keineswegs den Rückfall in den klassischen, gleichschrittigen, ausschließlichen Frontal- und Buchunterricht. Unterricht mit Systematik, Struktur und Austausch nimmt die Lernenden und ihre individuell unterschiedlichen Lernstände und Lernmöglichkeiten ernst, indem er sie zum individuell unterschiedlichen Weiterlernen herausfordert und dabei begleitet und unterstützt – sie nicht lediglich beim Lernen sich selbst überlässt. Unterricht mit Systematik, Struktur und Austausch kann entscheidend dazu beitragen, dass weniger Schülerinnen und Schüler Rechenschwierigkeiten haben.

# 12 PIKAS & Co

Als Hintergrundinfos geben wir zunächst einige weiterführende Hinweise zum Projekt PIKAS, auf dessen Website viele der konzeptionellen Rahmungen und der angegebenen konkreten Beispiele zu finden sind. Weitere Anregungen finden Sie auf den Webseiten der Partnerprojekte von PIKAS, welche auf den folgenden beiden Seiten kurz vorgestellt werden und unter *proprima.dzlm.de*.

**PIKAS** ist ein Anfang 2009 gegründetes Projekt zur Förderung der **p**rozess- und **i**nhaltsbezogenen **K**ompetenzen durch **A**nregung von fachbezogener **S**chulentwicklung.
Die konzeptionellen Leitvorstellungen des Projekts kommen durch die Anordnung der Materialien auf der Webseite in zehn 'Häusern' (1 bis 10) zum Ausdruck, die jeweils einem zentralen Thema der Unterrichtsentwicklung gewidmet sind *(pikas.dzlm.de)*.
Zielvorstellung ist ein Mathematikunterricht, der ...

- sowohl prozessbezogene als auch inhaltsbezogene Kompetenzen fördert (1),
- den langfristigen Kompetenzaufbau von der Vorschule bis in die Sekundarstufe im Blick hat (2),
- eine unterrichtsintegrierte Prävention, Diagnose und Förderung im Kontext von Rechenschwierigkeiten realisiert (3),
- Sprachförderung als eine zentrale Aufgabe auch des Mathematikunterrichts ansieht (4),
- eine Balance zwischen eigenen Denkwegen und vorgegebenen Kompetenzerwartungen hält (5),
- die Heterogenität der Lernstände von Schülerinnen und Schülern durch Konzepte wie das der ‚natürlichen Differenzierung' produktiv nutzt (6),
- ergiebige Aufgaben verwendet, die Schülerinnen und Schüler herausfordern statt lediglich beschäftigen (7),
- es Schülerinnen und Schülern ermöglicht, den Unterricht und ihren Lernprozess aktiv und selbstverantwortlich mitzugestalten (8),
- eine kontinuierliche und immer auch stärkenorientierte Lernstandsfeststellung als unverzichtbare Grundlage individueller Förderung ansieht (9) sowie
- prozessorientierte Leistungsbeurteilung und dialogische Leistungsrückmeldung auch im Fach Mathematik realisiert (10).

Bewusst wurde in PIKAS nicht eine Strukturierung entlang konkreter Themen (wie Symmetrie oder kleines Einmaleins) gewählt, sondern entlang von Querschnitts-Themen, die den gesamten Unterricht durchziehen. PIKAS bietet ein Rahmenkonzept mit exemplarischen, gut ausgearbeiteten sowie dokumentierten Materialien. PIKAS kann und soll nicht das Leitmedium des Unterrichts – in der Regel das Schulbuch – oder die Lehrerbildung ersetzen.
Wohl aber kann das PIK-Angebot eine Grundlage für eine reflektierte Unterrichts- und Fortbildungspraxis bieten, welches flexibel auf die jeweils spezifischen Umsetzungsbedingungen vor Ort bezogen werden kann (PIKAS-Team, 2012; Selter, 2017; Selter & Zannetin, 2018).

DZLM Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik

Alle Projekte sind Projekte unter dem Dach des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik *(DZLM, dzlm.de)*, eines bundesweit agierenden Konsortiums von neun Hochschulen. Forschungsbasiert und praxisnah entwickelt das Zentrum Fortbildungs- und Qualifizierungsprogramme, um diese in Kooperation mit den Bundesländern und Bildungseinrichtungen durchzuführen, weiter zu beforschen und kontinuierlich zu verbessern. Der Fokus liegt dabei auf langfristigen Angeboten für Lehrende, die andere fortbilden und begleiten (Multiplikatorinnen und Multiplikatoren).

Deutsche Telekom Stiftung

Das DZLM wurde initiiert und wird gefördert durch die Deutsche Telekom Stiftung.

Ministerium für
Schule und Bildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Die Projekte PIKAS, *Mathe inklusiv mit PIKAS, PIKAS digi, PIKAS kompakt* und *Mathe sicher können* wurden und werden unterstützt durch das Ministerium für Schule und Bildung NRW.

# KIRA

kira.dzlm.de

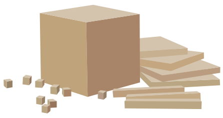
Studierende und Lehrpersonen lernen bei *KIRA* (‚Kinder rechnen anders'), Denkwege von Kindern im Mathematikunterricht besser zu verstehen, um individuell auf sie eingehen zu können. Das Material der KIRA-Webseite wird durch die vier Obergriffe ‚Problemlösen & Co', ‚Diagnose & Co', ‚Arithmetik' und ‚Geo & Co' strukturiert, die wiederum insgesamt 61 Unterseiten beinhalten.

# Mathe **inklusiv**
## mit PIKAS

pikas-mi.dzlm.de

Die primäre Zielsetzung von *Mathe inklusiv* besteht darin, Lehrpersonen der Primarstufe bei der Planung, Durchführung und Reflexion inklusiven Mathematikunterrichts zu unterstützen. Dazu werden Konzeptionen und Unterrichtsmaterialien entwickelt, die sowohl mathematikdidaktisch als auch sonderpädagogisch fundiert sind.

# Mathe sicher können



*https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/node/479*

Das Mathe-sicher-können-Material verfolgt den Grundgedanken der diagnosegeleiteten Förderung und hat als Ziel, schwächere Schülerinnen und Schüler gezielt zu identifizieren und sie entsprechend zu fördern. Im Fokus des Projekts *Mathe sicher können* stehen Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 3 bis 7, die dauerhafte und schwerwiegende Probleme beim Mathematiklernen haben. Für diese werden eng aufeinander bezogene Diagnose- und Fördermaterialien entwickelt, für Lehrpersonen bereitgestellt und in der Praxis erprobt.

# PIKAS digi

pikas-digi.dzlm.de

Das Projekt *PIKAS digi* befasst sich mit dem Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. Die Website bietet Fortbildungsmaterialien und Unterrichtsbeispiele zum Thema. Außerdem werden Leitideen des Einsatzes digitaler Medien formuliert. Die gängigen digitalen Medien für den Grundschulunterricht werden zudem in ihren Einsatzmöglichkeiten vorgestellt, und es werden Qualitätskriterien für deren Verwendung vorgestellt.

# primakom

primakom.dzlm.de

Die Selbstlernplattform *primakom* ist ein Angebot zu zentralen Inhalten und inhaltsübergreifenden Themen des Mathematikunterrichts für Lehrpersonen, besonders für diejenigen, die Mathematik fachfremd unterrichten. Unkompliziert, anschaulich und unabhängig von Zeit und Ort können Sie hier ihren Unterricht weiterentwickeln.

# PIKAS


pikas-kompakt.dzlm.de

In *PIKAS kompakt* wird in kompakter Form beschrieben, wie es im heutigen Mathematikunterricht der Primarstufe gelingen kann, prozessbezogene Kompetenzen auszubauen, Matheschwierigkeiten zu begegnen, sprachbildend zu unterrichten und Mathestärken zu fördern. Zu diesen Themen wird in knapper Form auch das zentrale theoretische Hintergrundwissen beschrieben.

# Literatur


Brügelmann, H. (1997). ‚Fördern durch Fordern'. Vorschlag für einen Brillenwechsel im Umgang mit Lernschwierigkeiten. In H. Balhorn & H. Niemann (Hrsg.), *Sprachen werden Schrift* (S. 20-29). Lengwil: Libelle.

Brügelmann, H. (2011). *Den Einzelnen gerecht werden - in der inklusiven Schule. Mit einer Öffnung des Unterrichts raus aus der Individualisierungsfalle! Zeitschrift für Heilpädagogik*, 62(9), 355 - 361.

Englisch, U., Denkhaus, A., Dolenc-Petz, R., Ganser, B. & Ihn-Huber, P. (2018). *Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen. So unterstützen Lehrkräfte in der Grundschule.* https://www.km.bayern.de/rechenschwierigkeiten (Abruf am 13.01.19).

Fritz, A., Schmidt, S. & Ricken, G. (2017). *Handbuch Rechenschwäche.* Weinheim: Beltz.

Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100: Theoretische und empirische Analysen.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Gaidoschik, M. (2007). *Rechenschwäche vorbeugen – Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen.* Wien: ÖBV HPT.

Gaidoschik, M. (2009). *Rechenschwäche verstehen - Kinder gezielt fördern - Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis.* Buxtehude: Persen.

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht.* Frankfurt: Peter Lang.

Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken.* Seelze: Kallmeyer.

Gaidoschik, M., Fellmann, A. & Guggenbichler, S. (2016). Computing by counting in first grade: It ain't necessarily so. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth Conference of European Research in Mathematics Education CERME 9* (S. 259-265). Prag: Charles University.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht*. opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf (Abruf am 14.01.19).

Götze, D. (2015). *Sprachförderung im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen.

Götze, D., Selter, Ch. & Zannetin, E. (2019). *Das KIRA-Buch. Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht.* Seelze: Kallmeyer.

Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen.* Baltmannsweiler: Schneider.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2012). Fördern im Mathematikunterricht. In H. Bartnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern – Kompetenzen stärken – in der Eingangsstufe.* Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2014). *Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen.* Seelze: Kallmeyer.

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* München: Luchterhand.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik.* München: Elsevier.

Kuhnke, K. (2012). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel – Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr.* Wiesbaden: Springer.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht – Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik*, (54), 2-9.

Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht-bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). *Pädagogische Rundschau*, 4(65), 401-426.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern.* Bern: Haupt.

Moser Opitz, E. (2010): Diagnose und Förderung: Aufgaben und Herausforderungen für die Mathematikdidaktik und die mathematikdidaktische Forschung. In A. Lindmeier & St. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 11-18), Münster: WTM-Verlag.

Pant, H. A., Stanat, P., Schroeders, U., Roppelt, A., Siegle, T. & Pöhlmann, C. (2013). IQB-Ländervergleich 2012. *Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I.* Münster: Waxmann.

PIKAS-Team (2012). *Mathe ist Trumpf.* Berlin: Cornelsen.

Prediger, S., Freesemann, O., Moser Opitz, E. & Hußmann, S. (2013). Unverzichtbare Verstehensgrundlagen statt kurzfristige Reparatur – Förderung bei mathematischen Lernschwierigkeiten in Klasse 5. *Praxis der Mathematik in der Schule,* 55(51), S. 12-17.

Radatz, H. (1989). Schülervorstellungen von Zahlen und elementaren Rechenoperationen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1989* (S. 306-309). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Reiss, K., Sälzer, Ch., Schiepe-Tiska, A., Klieme, E. & Köller, O. (Hrsg.) (2016). PISA 2015. *Eine Studie zwischen Kontinuität und Innovation.* Münster: Waxmann.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Heidelberg: Spektrum.

Schipper, W. (2005). *Lernschwierigkeiten erkennen - verständnisvolles Lernen fördern.* http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/M4.pdf (Abruf am 14.01.19).

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Hannover: Schroedel.

Schipper, W. (2011). Rechenschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern. In R. Demuth, G. Walther & M. Prenzel (Hrsg.), *Unterricht entwickeln mit Sinus* (S. 73-82). Seelze: Kallmeyer.

Schipper, W., Wartha, S. & von Schroeders, N. (2011). BIRTE 2, *Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr.* Hannover: Schroedel.

Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr.* Braunschweig: Schroedel.

Selter, Ch. (2017). *Guter Mathematikunterricht. Konzeptionelles und Beispiele aus dem Projekt PIKAS.* Berlin: Cornelsen.

Selter, Ch. (2017a). Förderorientierte Diagnose und diagnosegeleitete Förderung. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (S. 375-393). Weinheim: Beltz.

Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen.* Stuttgart: Klett.

Selter, Ch. & Zannetin, E. (2018). *Mathematik unterrichten in der Grundschule. Inhalte – Leitideen – Beispiele.* Seelze: Kallmeyer.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können - Natürliche Zahlen. Förderbausteine und Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen.* Berlin: Cornelsen.

Selter, Ch., Walter, D., Walter, G. & Wendt, H. (2016). Mathematische Kompetenzen im internationalen Vergleich: Testkonzeption und Ergebnisse. In H. Wendt, W. Bos, Ch. Selter, O. Köller, K. Schwippert & D. Kasper (Hrsg.), *Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 79-136). Münster: Waxmann.

Spiegel, H. & Selter, Ch. (2016). Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Seelze: Kallmeyer.

Stanat, P., Schipolowski, S., Rjosk, C., Weirich, S. & Haag, N. (2017). *IQB-Bildungstrend 2016. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im zweiten Ländervergleich.* Münster: Waxmann.

Sundermann, B. & Selter, Ch. (2013). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen.

Wartha, S. & Schulz, A. (2014). *Rechenproblemen vorbeugen.* Berlin: Cornelsen.

Wember, F. (1998): Zweimal Dialektik: Diagnose und Intervention, Wissen und Intuition. *Sonderpädagogik,* 28 (2), 106-120.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *mathematik lehren,* (2), 4-11.

Wittmann, E. Ch. (1992). Üben im Lernprozeß. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller, *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd.2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (S. 175-182). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1990; 1992): *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd.1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Bd.2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. (2009). *Das Zahlenbuch. Handbuch zum Frühförderprogramm.* Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (o.J). *Die Grundkonzeption des Zahlenbuchs.* www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/mathe2000/pdf/Grundkonzeption%20mathe%202000.pdf (Abruf 12.04.19).

### Weitere Handreichungen und Informationen zum Thema

Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen
https://www.isb.bayern.de/grundschule/materialien/rechenschwierigkeiten/
Rechenstörungen als schulische Herausforderung
https://bildungsserver.berlin-branden-burg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissen-schaften/mathematik/praevention_rechenstoerungen/Anlage4_Handreichung.pdf
Das Recheninstitut zur Förderung mathematischen Denkens
http://www.recheninstitut.at/
Wissenswertes zum Thema Rechenschwäche/Dyskalkulie
https://www.zahlbegriff.de/PDF/Gerster.pdf
Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens
https://publikationen.sachsen.de/bdb/artikel/11979/documents/12817
Bielefelder Förderkartei
https://www.bielefelder-rechentest.de/ftp/Förderkartei.pdf
Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern
www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/M4.pdf
Förderzentrum IEEM
http://foerderzentrum.mathematik.tu-dortmund.de/

# Herausgeber

MINISTERIUM FÜR SCHULE UND BILDUNG
des Landes Nordrhein-Westfalen

Völklinger Straße 49
40221 Düsseldorf
Tel.: 0211 5867-40
Fax: 0211 5867-3220
E-Mail: poststelle@msb.nrw.de
www.schulministerium.nrw.de


**Autorinnen und Autoren:**
Stefanie Gatzka
Alexandra Koch
Melanie Maske-Loock
Christiane Ochmann
Christoph Selter
Nadine Wilhelm

**mit Unterstützung von:**
Andrea Baldus
Johanna Brandt
Maren Laferi
Joscha Müller-Späth
Daniel Walter
Ben Weiß

Viele Anregungen entstammen dem Projekt PIKAS und seinen Partnerprojekten.

**Titelbild:** pixabay, klimkin

**Abbildungen & Gestaltung:** Karoline Mosen; Projekt PIKAS

**Druck:** Tannhäuser Media GmbH, Düsseldorf

**Stand:** September 2020

MINISTERIUM FÜR SCHULE UND BILDUNG
des Landes Nordrhein-Westfalen

Völklinger Straße 49
40221 Düsseldorf
Tel.: 0211 5867-40
Fax: 0211 5867-3220
E-Mail: poststelle@msb.nrw.de
www.schulministerium.nrw.de